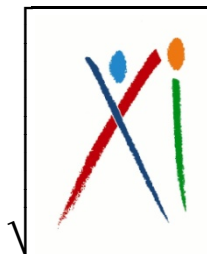


Istituto Salesiano PIO XI  
Ginnasio-Liceo Classico “**Sacro Cuore**”



**III Liceo.**

Introduzione.

Questa breve dispensa di Matematica ha il solo scopo di essere una sintesi di quanto studiato durante la seconda parte dell'anno 2012-2013 nella classe III Liceo Classico e riguarda solo gli argomenti di Analisi. Essa non esaurisce tutti gli argomenti per il cui studio si necessita del libro di testo e degli appunti delle lezioni tenute in classe. Essa si integra anche con l'insieme delle esercitazioni e delle verifiche realizzate nell'anno.

### Definizione di **Intervallo**

Se  $a$  e  $b$  sono due numeri Reali (supporremo costantemente  $a < b$ ) si chiama **intervallo** e lo si denota  $(a,b)$ , l'insieme di tutti i numeri Reali  $x$  compresi tra  $a$  e  $b$ , questi esclusi. I numeri  $a$  e  $b$  si dicono **estremi** dell'intervallo e precisamente:  $a$  è l'estremo sinistro e  $b$  estremo destro. Gli altri numeri dell'intervallo si dicono **interni** all'intervallo mentre i numeri minori di  $a$  o maggiori di  $b$  si dicono esterni all'intervallo. La differenza  $b-a$  si chiama **ampiezza** dell'intervallo.

L'intervallo chiuso  $[a,b]$  è tale perché ad esso appartengono gli estremi, cioè  $a \leq x \leq b$ .

Gli intervalli infiniti sono quelli costituiti da tutti i numeri reali maggiori od uguali ad un numero assegnato  $a$  oppure minori od uguali ad  $a$ . Tali intervalli si indicano rispettivamente con  $(a, +\infty)$   $(-\infty, a)$

### Definizione di **Intorno**

Si chiama **Intorno** di un numero Reale  $c$  un intervallo qualunque, al quale appartenga il numero  $c$  come elemento interno.

In generale si intende per intorno di  $c$ , l'intervallo  $(c - \varepsilon, c + \varepsilon')$  con  $\varepsilon$  e  $\varepsilon'$  arbitrariamente piccoli e positivi.

È possibile, di un numero Reale  $c$  considerare solo un intorno *destro* o un intorno *sinistro*, cioè l'insieme di tutti i numeri di un intervallo avente  $c$  come estremo sinistro o come estremo destro

Diremo che un punto  $c$  di un insieme lineare è **isolato** quando non esistono altri punti dell'insieme in un intorno arbitrariamente piccolo di  $c$ . (Esempio: *i numeri interi sono punti isolati nei Numeri Reali*)

### Definizione di **Punto di Accumulazione**

Diremo invece che un punto  $C$ , che può anche non appartenere all'insieme, è un punto di accumulazione di un insieme lineare se, in ogni intorno di  $C$  esistono infiniti punti dell'insieme.

Esempio: Gli elementi dell'insieme **R** dei numeri reali sono tutti punti di accumulazione di **R**.

## Funzioni tra insiemi.

Due insiemi  $X$  e  $Y$  sono in corrispondenza se esiste una legge che permette di associare ogni elemento di  $X$  ad uno o più elementi di  $Y$ .

Una funzione è una corrispondenza univoca, cioè la legge che associa ad un elemento  $x \in X$  uno ed uno solo elemento  $y \in Y$ .

Esempio: il grafico di una circonferenza non è il grafico di una funzione.

L'insieme  $X$  è detto dominio della funzione e l'insieme  $f(X)$  codominio. In generale  $f(X)$  è un sottoinsieme di  $Y$ . Se il codominio coincide tutto con  $Y$  allora la funzione si dice *suriettiva*.

Una funzione si dice *iniettiva* se per ogni coppia di elementi di  $X$  diversi, le loro rispettive immagini sono ancora diverse.

Esempio: il grafico della parabola non è il grafico di una funzione iniettiva.

Nel caso delle funzioni Reali di variabile Reale, cioè quando sia l'insieme  $X$  che l'insieme  $Y$  sono due sottoinsiemi dell'insieme  $R$ , il Dominio si chiama anche *insieme di esistenza* o *insieme di definizione* della funzione.

Per determinare l'insieme di esistenza di una funzione matematica, occorre ricordare che, mentre le operazioni di somma e prodotto sono sempre possibili, l'operazione di divisione non ha significato se il divisore è nullo; l'operazione di estrazione di radice con indice pari ha risultato solo se il radicando è maggiore o uguale a zero; il logaritmo di un numero è reale solo se quest'ultimo è positivo.

Esempio: trovare l'insieme di definizione o domini della funzione

$$y = \sqrt{\frac{x-2}{x+1}}$$

Poiché siamo di fronte al calcolo di una radice quadrata, tale calcolo è possibile solo se il radicando sia maggiore di zero.

Quindi:

$$\frac{x-2}{x-1} \geq 0$$

$$\text{E cioè: } N \geq 0 \Leftrightarrow x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$$

$$\text{E } D > 0 \Leftrightarrow x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$$

Dunque il dominio sarà:  $(-\infty, -1) \cup (+2, +\infty)$

## Classificazione delle funzioni

Quando la legge esprime la relazione tra  $x$  e  $y$  può ridursi alla forma

$$y=f(x)$$

si dice che la funzione è data in forma *esplicita*.

Le funzioni matematiche si dividono principalmente in funzioni **algebriche** e **trascendenti**.

Sono algebriche quelle funzioni nelle quali la relazione che passa fra  $x$  e  $y$ , ridotta a forma implicita si presenta come un'equazione algebrica, cioè polinomiale, di grado qualsiasi nelle due variabili  $x$  e  $y$ .

Le funzioni trascendenti che abbiamo studiato sono le funzioni goniometriche, esponenziali e logaritmiche.

In generale ecco un possibile e utile schema:

$$y = f(x) \begin{cases} \text{algebriche} \begin{cases} \text{razionali} \begin{cases} \text{Intere} \\ \text{Fratte} \end{cases} \\ \text{irrazionali} \begin{cases} \text{Intere} \\ \text{Fratte} \end{cases} \end{cases} \\ \text{trascendenti} \end{cases}$$

Nello studio teso alla rappresentazione grafica di una funzione, è dunque importante prima di tutto classificare la funzione, poi ovviamente calcolarne il dominio scrivendolo come unione di intervalli. Passo successivo sarà la discussione del segno, per calcolare dove la funzione è maggiore di zero, e dunque il suo grafico sarà sopra l'asse delle  $x$  e dove la funzione è minore di zero, e dunque il suo grafico sarà sotto l'asse delle  $x$ .

Una funzione il cui grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate si dice *Pari*. La condizione analitica che si verifica sarà dunque:  $f(-x) = f(x)$

Una funzione il cui grafico è simmetrico rispetto all'origine, si dice *Dispari*. La condizione analitica che si verifica, sarà dunque:  $f(-x) = -f(x)$

Una funzione, ovviamente, può non essere né pari né dispari. Una funzione non può mai avere il grafico simmetrico rispetto all'asse delle ascisse, altrimenti si verificherebbe una contraddizione con la definizione stessa di funzione.

Esempio:

la funzione  $y = \frac{x^2-1}{1+x^2}$  è una funzione *Pari*. Infatti  $f(-x) = \frac{(-x)^2-1}{1+(-x)^2} = \frac{x^2-1}{1+x^2} = f(x)$

### Esercizio Svolto 1

$$\text{Sia } y = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$$

*Classificazione:* è una funzione Algebrica, Irrazionale, Fratta.

*Studio del dominio:* essendo una funzione irrazionale la cui irrazionalità è data da una radice di ordine 2, il radicando deve essere maggiore o uguale a zero. A tale condizione deve aggiungersi che il denominatore deve essere diverso da zero, per cui:

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \geq 0$$

Con

$$x^2 + 1 \neq 0$$

Quindi:

$$N \geq 0 \rightarrow x^2 - 1 \geq 0$$

Risolvo l'equazione associata:  $x^2 - 1 = 0$ ;  $x^2 = 1$ ;  $x = \pm 1$

La disequazione è verificata per valori esterni.

Il denominatore, essendo la somma di due quadrati, è sempre positivo e non si annulla mai.

Quindi il dominio è  $D = (-\infty, -1] \cup [+1, +\infty)$ .

*Discussione del segno:* essendo la nostra funzione una radice quadrata, per definizione il suo valore è, dove esiste, sempre positivo.

$$\sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}} \geq 0 \quad \forall x \in D$$

Si noti, inoltre, che la funzione è *pari*, cioè simmetrica rispetto all'asse delle  $y$ , poiché  $f(-x) = f(x)$

$$\sqrt{\frac{(-x)^2-1}{(-x)^2+1}} = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$$

## Limiti

### Limite finito

Consideriamo una funzione  $y=f(x)$ , definita in tutti i punti di un intervallo  $(a,b)$ , eccetto in un punto  $c$  interno all'intervallo. Attribuiamo ad  $x$  valori che differiscono da  $c$  per eccesso o per difetto, di una certa quantità  $\sigma$ , via via decrescente, e determiniamo i corrispondenti valori di  $y$ . Può accadere che questi siano tutti del tipo  $l \pm \varepsilon$  dunque scriveremo:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$$

**Si dice che per  $x$  tendente a  $c$  la funzione  $f(x)$  tende al limite finito  $l$  se, fissato un numero positivo  $\varepsilon$  arbitrariamente piccolo, si può trovare, in corrispondenza di esso, un intorno di  $c$  tale che per ogni valore di  $x$  appartenente a questo intorno si abbia**

$$|f(x) - l| \leq \varepsilon$$

In simboli:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / |x - c| \leq \delta \rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

In termini più discorsivi, l'informazione che ottengo è che quando il valore della  $x$  è vicino a  $c$  allora il valore della funzione è vicino a  $l$

Se si devono considerare solo valori appartenenti ad un intorno alla destra o alla sinistra del punto  $c$ , allora si dice che la funzione ha per limite destro o sinistro il numero  $l$  quando  $x$  tende a  $c$  dalla destra o dalla sinistra, se, preso per arbitrio il numero positivo  $\varepsilon$  è possibile corrispondentemente determinare un intorno destro (sinistro) di  $c$  per tutti i punti del quale si abbia

$$|f(x) - l| \leq \varepsilon$$

In questo caso si scrive

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = l$$

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = l$$

## Limite infinito

**Si dice che per  $x$  tendente a  $c$  la funzione  $f(x)$  tende all'infinito, quando, fissato un numero positivo  $M$  arbitrariamente grande, esiste in corrispondenza ad esso un intorno di  $c$  tale che per tutti i valori di  $x$  di tale intorno, escluso al più il punto  $c$ , si abbia**

$$|f(x)| > M$$

Ciò significa che quando la variabile indipendente  $x$  assume i valori di un conveniente intorno del punto  $c$ , i valori corrispondenti di  $f(x)$  superano, in valore assoluto, qualsiasi numero positivo si possa immaginare, anche grandissimo. Più precisamente si dice che una funzione tende a  $+\infty$  (oppure a  $-\infty$ ) se scelto il numero positivo  $M$ , si può trovare un intorno di  $c$  che per tutti i suoi punti sia

$$f(x) > M \text{ (oppure } f(x) < -M)$$

In questo caso la retta di equazione  $x=c$  è un asintoto verticale, cioè una retta alla quale il grafico della funzione si avvicina sempre di più senza mai toccarla.

Tutte le definizioni date nei riguardi dei limiti per  $x$  tendente al numero finito  $c$ , si possono ripetere anche per  $x$  tendente all'infinito.

E precisamente:

**Si dice che per  $x$  tendente all'infinito la funzione  $f(x)$  tende al limite finito  $l$  se, fissato un numero positivo  $\varepsilon$  arbitrariamente piccolo, si può trovare, in corrispondenza ad esso, un numero  $x_\varepsilon > 0$  tale che, per ogni  $|x| \geq x_\varepsilon$  si abbia**

$$|f(x) - l| \leq \varepsilon$$

**E si scrive:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$$

In questo caso la retta di equazione  $y=l$  è un asintoto orizzontale

**Si dice che per  $x$  tendente all'infinito la funzione  $f(x)$  tende all'infinito quando, fissato un numero positivo  $M$  arbitrariamente grande, si può trovare, in corrispondenza ad esso, un numero  $x_M > 0$  tale che, per ogni  $|x| \geq x_M$  si abbia**

$$|f(x)| > M$$

**E si scrive:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

### Esercizio svolto n°2:

Proviamo che

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{1}{6}x + 2 \right) = \frac{5}{2}$$

In base alle definizioni date, basterà provare che esiste un intorno del punto  $x=3$  che, per tutti i valori di  $x$  di quell'intorno, sia verificata la disequaglianza:

$$\left| \frac{1}{6}x + 2 - \frac{5}{2} \right| < \varepsilon$$

Essendo  $\varepsilon$  un numero positivo piccolo a piacere.

Risolvendo la disequazione infatti si ha:

$$\left| \frac{1}{6}x + 2 - \frac{5}{2} \right| = \left| \frac{x + 12 - 15}{6} \right| = \left| \frac{x - 3}{6} \right| < \varepsilon$$

Cioè la nostra disequazione è verificata solo se  $x$  verifica

$$|x - 3| < 6\varepsilon$$

cioè se  $x$  appartiene ad un intorno di 3 di ampiezza  $\delta = 6\varepsilon$ .

### Forme indeterminate

Ripresa dell'esercizio 1

Procedendo nello studio della funzione:

$$y = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}$$

Calcoliamo i limiti agli estremi aperti del suo dominio che ricordiamo essere:

$$D = (-\infty, -1] \cup [+1, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Nel calcolo arriviamo ad una scrittura apparentemente senza alcun significato: siamo di fronte ad una *forma indeterminata*. Anche il simbolo  $\frac{0}{0}$  è una *forma indeterminata*. Vi sono altre forme indeterminate come  $0 \cdot \infty$  e  $\infty - \infty$ , ma queste, con qualche semplice trasformazione, si riconducono alle due considerate.

Per calcolare l'effettivo valore di una forma indeterminata si cerca, con qualche artificio algebrico, di eliminare la ragione dell'indeterminatezza.

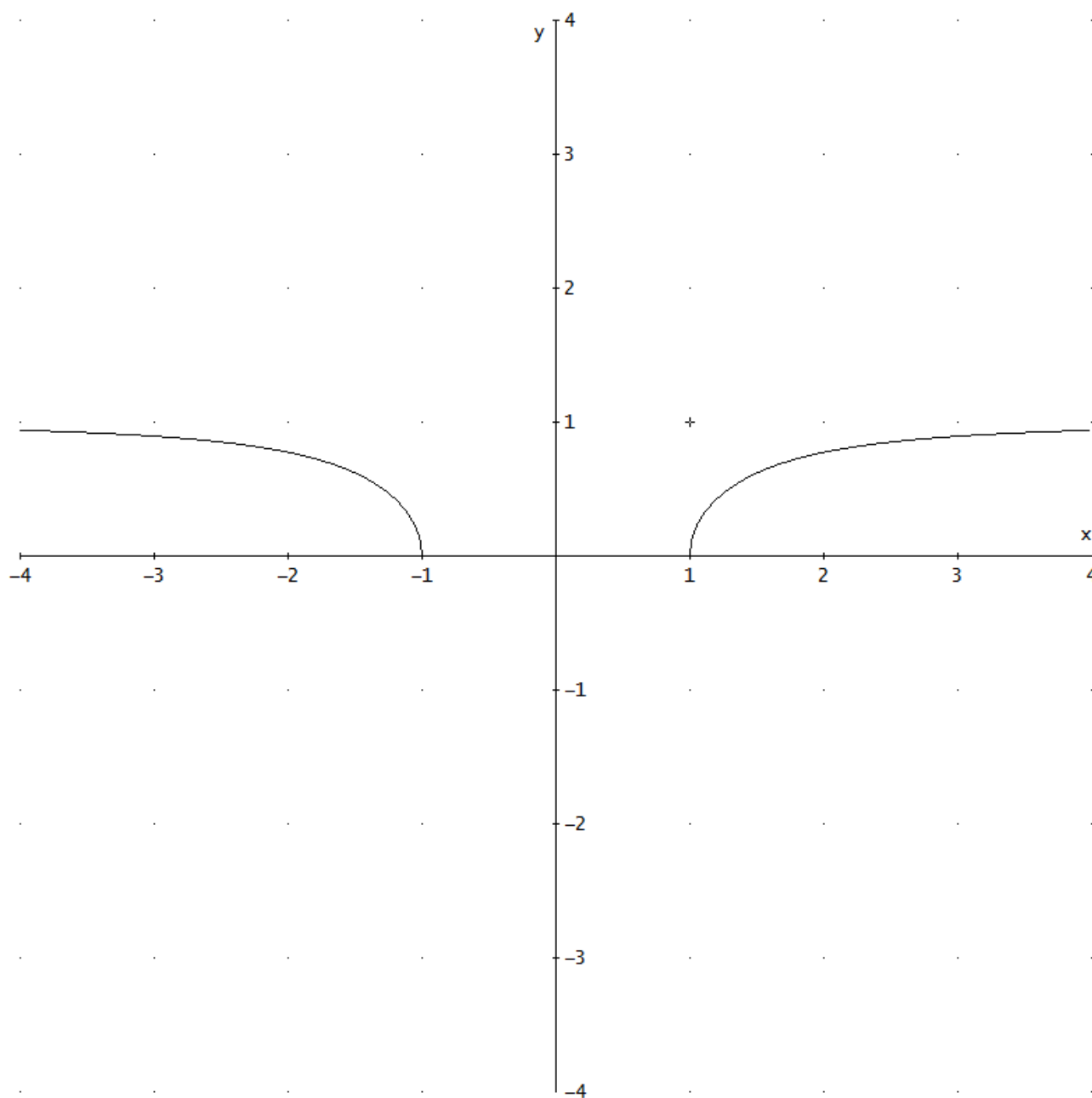


Nel caso  $\frac{\infty}{\infty}$ , ad esempio, nelle funzioni algebriche, si mette in evidenza il monomio di grado massimo sia al denominatore che al numeratore.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{\frac{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}} = \sqrt{\frac{1}{1}} = 1$$

Abbiamo così anche scoperto che la retta di equazione  $y=1$  è un asintoto orizzontale.

Il grafico della nostra funzione risulta, dunque:



Esercizio svolto n°3

Si voglia calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2 - 3x + 2}$$

Che si presenta sotto la forma  $\frac{0}{0}$  come è facile verificare.

Si osservi attentamente il numeratore. Esso è un polinomio di terzo grado che si annulla in  $x=2$ . Usando la regola di Ruffini esso si fattorizza in  $(x-2)(x^2-x-2)$  (*provare*)

Anche il denominatore, annullandosi in  $x=2$  e  $x=1$ , si scompone in  $(x-2)(x-1)$ . Dunque, scomponendo numeratore e denominatore, otteniamo:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2-x-2)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-x-2)}{(x-1)} = \frac{0}{1} = 0$$

Definizione:

Una funzione si dice **continua** in un punto  $c$  quando esiste il limite della funzione per  $x$  tendente a  $c$ , e questo limite è uguale al valore della funzione in quel punto, perciò quando:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

Dai teoremi sui limiti e della definizione di continuità segue che la somma, la differenza, il prodotto di più funzioni continue in un punto  $c$  sono pure funzioni continue in  $c$ .

Ricordiamo che affinché una funzione  $y=f(x)$  sia continua nel punto  $x=c$  devono verificarsi contemporaneamente le seguenti condizioni:

1. Esistenza del valore della funzione per  $x = c$
2. Esistenza del limite finito  $l$  della funzione per  $x \rightarrow c$
3. Coincidenza tra  $l$  e  $f(c)$

Quando anche una sola delle tre condizioni non è verificata la funzione non è continua nel punto  $x = c$ : la funzione si dice allora *discontinua in tale punto*.

Quando è verificata la seconda condizione ma non la prima o la terza, si è di fronte ad una *discontinuità eliminabile*. L'eliminazione si otterrebbe organizzando una nuova funzione variando il valore in  $x = c$  e precisamente ponendo  $f(c) = l$

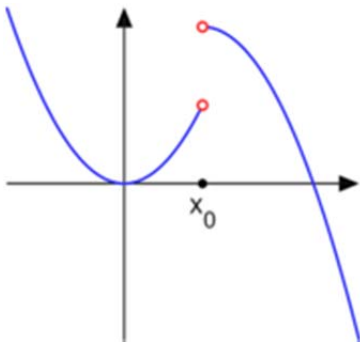
## Tipi di discontinuità

Un punto  $x_0$  è di **discontinuità di prima specie** quando esistono i limiti sinistro e destro della funzione per  $x$  che tende a  $x_0$  e sono entrambi finiti, ma sono diversi. Ovvero:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = h \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = k$$

La discontinuità viene comunemente definita "di salto" perché l'aspetto del grafico è quello di un salto nel punto di discontinuità.

### Esempi



Discontinuità a salto.

La funzione

$$f(x) = \frac{x}{|x|}$$

definita per

$$x \neq 0$$

vale sempre 1 per  $x$  positivi e -1 per  $x$  negativi e fa quindi un "salto" in  $x = 0$ .

### Discontinuità di seconda specie (o essenziale)

Un punto  $x_0$  è di **discontinuità di seconda specie** (o **essenziale**) quando il limite della funzione per  $x$  che tende a  $x_0$  da destra e/o da sinistra, tende ad infinito o non esiste affatto. In altre parole:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$$

Oppure

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty$$

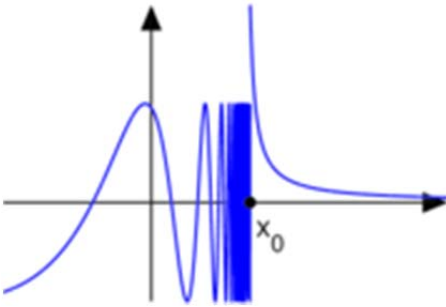
oppure

Oppure

$$\nexists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

$$\nexists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x).$$

## Esempi



Discontinuità essenziale.

Un esempio con il limite infinito è la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

definita per

$$x \neq 0$$

Dunque:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

## Discontinuità di terza specie (o eliminabile)

Un punto  $x_0$  è di **discontinuità di terza specie** quando il limite destro della funzione per  $x$  che tende a  $x_0$  è uguale a quello sinistro, con entrambi valori finiti, ma  $x_0$  non è contenuto nel dominio oppure il valore di  $f$  in  $x_0$  non coincide con questi limiti. In altre parole:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = k \neq f(x_0)$$

(oppure  $x_0$  non è nel dominio).

La discontinuità viene comunemente definita "eliminabile" in quanto è sufficiente aggiungere  $x_0$  al dominio (se necessario) e modificare il valore di  $f$  in  $x_0$  nel modo seguente:

$$f(x_0) = k$$

per rendere la funzione continua nel punto. La nuova funzione si chiama *prolungamento continuo della  $f$* .