Raccolta di problemi di geometria analitica

PROBLEMA 1. PARABOLA + CIRCONFERENZA

Determinare:

1. l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse delle y avente il vertice $V(3\,;0)$ e passante per $A(1\,;4)$
2. i punti d'intersezione della parabola con la retta *r* di equazione $x-y+9=0$.
   (*disegna la parabola e la retta ed indica con B il punto d'intersezione di ascissa minore)*
3. l'equazione della retta per B e tangente alla parabola
4. l'equazione della circonferenza con centro in V e passante per B.
5. l'equazione dell'asse del segmento AB.
6. l'area del triangolo *AMC,* dove *M* è il punto medio del segmento AB e *C* il punto d'intersezione della retta *r* con l'asse del segmento AB

$$\left[y=x^2-6x+9;\quad B(0\,;9);\quad r: y=-6x+9\quad;\quad x^2+y^2-6x-81=0\ ;\ y=\frac{1}{5}x+\frac{32}{5}\right]$$

PROBLEMA 2. CIRCONFERENZA + PARABOLA

Sono date la circonferenza $x^2+y^2-6x-2y+8=0$ e la retta $x+y-4=0$

1. Determinare le coordinate dei punti della loro intersezione indicando con *V* quello di ascissa minore e con *A* l'altro.
2. Verificare analiticamente che il centro della circonferenza è sulla retta e disegnare il tutto.
3. Nell'equazione $y=ax^2+bx+c$ determinare i coefficienti *a,b,c* in modo che la parabola da essa rappresentata abbia vertice *V* e contenga *A..*
4. Scrivere le equazioni delle tangenti alla parabola condotte dal punto $\left(\frac{5}{2};3\right)$ e trovare le coordinate dei punti di contatto delle tangenti con la parabola.
5. Calcolare la lunghezza della corda che congiunge i suddetti punti di contatto

$$\left[V(2\,;2);\ \ \mathrm{A}(4\,;0);\ y=-\frac{1}{2}x^2+2x;\ \ y=x+\frac{1}{2}\quad y=-2x+8\right]$$

PROBLEMA 3. PARABOLA + CIRCONFERENZA

Dopo aver scritto l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse *y*, avente il vertice nel punto $(3\,;-2)$ e passante per il punto $(1\,;2)$, si conduca per il suo punto *A* di ascissa 5 la tangente alla curva e si indichi con *B* il punto in cui essa incontra l'asse della parabola. Detto *C* il punto d'intersezione dell'asse della parabola con la normale in *A* alla curva (*perpendicolare alla tangente*), verificare che i punti *A, B, C* appartengono ad una stessa circonferenza con il centro nel fuoco della parabola

$$\left[y=x^2-6x+7;\quad B(3\,;-6);\quad C\left(3\,;\frac{5}{2}\right);\quad 2x^2+2y^2-12x+7y-12=0\right]$$

PROBLEMA 1. ELLISSE + CIRCONFERENZA

Trovare i punti comuni all'ellisse $x^2+4y^2=4$ e alla circonferenza passante per i fuochi dell'ellisse e avente il centro nel vertice superiore dell'ellisse.

$$\left[\left(\pm\frac{4\sqrt{2}}{3};\frac{1}{3}\right);\ (0\,;-1)\right]$$

PROBLEMA 2. ELLISSE + CIRCONFERENZA + PARABOLA

Dopo aver disegnato l'ellisse d'equazione $x^2+5y^2=9$ e i punti $A(-3\,;0)$ e $B(2\,;1)$, trovare:

a. le rette t_A e t_B ad essa tangenti rispettivamente nei punti A e B
b. il punto P intersezione di t_A e t_B
c. l'equazione della circonferenza con centro nell'origine e passante per P
d. la tangente in P alla circonferenza
e. la parabola con asse coincidente con l'asse y, vertice nel punto d'intersezione della circonferenza con l'asse y positivo, e passante per i vertici (sull'asse x) dell'ellisse

$$\left[t_A: x=-3;\ t_B: 2x+5y=9;\ P(-3\,,3)\ ;\ \ x^2+y^2=18\ ;\ y=x+6\right]$$

PROBLEMA 3. PARABOLA +CIRCONFERENZA

Rispetto ad un sistema di assi cartesiani ortogonali:

a. scrivere l'equazione della parabola di asse $x = 2$, passante per il punto $(-2;-6)$ e condurre per i punti O e A di ordinata nulla le tangenti alla curva indicando con B il loro punto d'intersezione;

b. scrivere l'equazione della circonferenza passante per i punti O, A e B

c. condotta da O una semiretta interna all'angolo $A\hat{O}B$ e indicati con P, M e Q i punti che essa ha in comune, rispettivamente, con il minore dei due archi AB di circonferenza, con il segmento AB e con l'arco di parabola, esprimere in funzione del coefficiente angolare m della semiretta la lunghezza dei segmenti MQ ed MP e, quindi, il loro rapporto;

d. calcolare il coefficiente angolare della semiretta in corrispondenza del quale, il rapporto di cui al punto c. risulta uguale a $\frac{4}{5}$.

$$\left[\begin{array}{l} a)\ y=-\frac{1}{2}x^2+2x;\quad A(4,0)\quad t_O: y=2x;\quad t_A: y=-2x+8;\ B(2,4) \\ b)\ x^2+y^2-4x-3y=0 \\ c)\ y=mx\ \text{ con } 0<m<2;\ Q(4-2m;\ \ldots)\ M\left(\frac{8}{m+2};\ \ldots\right)\ P\left(\frac{3m+4}{m^2+1};\ \ldots\right) \\ \quad \overline{QM}=\frac{2m^2}{m+2}\sqrt{1+m^2};\ \overline{MP}=\frac{5m(2-m)}{(m^2+1)(m+2)}\sqrt{1+m^2};\ \frac{QM}{MP}=\frac{2m(m^2+1)}{5(2-m)} \\ d)\ \text{Rapporto}=\frac{4}{5}\quad \text{per } m=1 \end{array}\right]$$

PROBLEMA 4. IPERBOLE EQUILATERA + PARABOLA + CIRCONFERENZA .

Trovare l'equazione dell'iperbole equilatera riferita agli asintoti che passa per il punto $(1;4)$ e trovare le intersezioni *A* e *B* (poste rispettivamente nel primo e terzo quadrante) con la retta di equazione $y = x$. Trovare l'equazione della parabola ad asse verticale che passa per *A* e *B* e che è tangente alla retta di equazione $y = x + 2$; detto *C* il punto della retta $y = x$ posto fra *A* e *B* tale che $\overline{CA} = \sqrt{2}$, scrivere l'equazione della circonferenza che ha il centro nel punto *C* e che passi per il vertice della parabola. Verificare, analiticamente, che la parabola e l'iperbole equilatera hanno la tangente in comune nel punto *A.*

$$\left[xy=4;\ A(2;2)\ \ B(-2;-2);\ y=-\frac{1}{2}x^2+x+2;\ C(1;1);\quad 4x^2+4y^2-8x-8y-1=0\right]$$

PROBLEMA 5. PARABOLA + CORCONFERENZA

Scrivere, in un riferimento cartesiano ortogonale, l'equazione della parabola γ avente il fuoco in $F(2;3)$ e per direttrice la retta $y = 5$. Disegnare la curva indicando con A e B le sue intersezioni con l'asse delle ascisse e con C l'intersezione con l'asse delle ordinate.

Si trovi poi l'equazione della retta passante per A e per F e si calcolino le coordinate dell'ulteriore punto M in cui tale retta intersechi γ. Dimostrare che la circonferenza avente per diametro AM è tangente alla direttrice della parabola.

$$\left[\gamma: y=-\frac{1}{4}x^2+x+3;\ \text{ retta } AF: 3x-4y+6=0;\quad M\left(3;\frac{15}{4}\right)\right]$$

PROBLEMA 6. PARABOLA + CORCONFERENZA

Dopo aver scritto l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse *y*, avente vertice in *V*(1; 0) e passante per $A\left(\frac{5}{2};\frac{9}{4}\right)$, indicato con *C* il suo punto d'intersezione con l'asse *y*, determinare l'equazione della tangente *t* alla parabola in *C* e l'equazione della circonferenza con centro in *C* e tangente all'asse *x*.

$$\left[y=x^2-2x+1;\ \ C(0;1);\ t: y=-2x+1\qquad x^2+(y-1)^2=1\right]$$

PROBLEMA 7. PARABOLA + CORCONFERENZA

Trovare l'equazione della parabola α con asse di simmetria parallelo all'asse delle *y* passante per il punto $A(8\,;2)$ e avente il vertice in $V(4\,;0)$. Determinare l'ulteriore punto *B* della parabola di ordinata 2 e l'equazione della retta *t* tangente ad α in *B* . Scrivere l'equazione della circonferenza γ di centro $C(4\,;6)$ e tangente anch'essa alla retta *t* . Calcolare il punto *D* d'intersezione di *t* con la direttrice di α e l'area del triangolo *DAF*, dove *F* è il fuoco. Scrivere infine l'equazione della parabola β tangente nell'origine degli assi alla bisettrice del primo e terzo quadrante e passante per il fuoco di α

$$\left[\alpha: y=\frac{1}{8}x^2-x+2;\quad B(0\,;2);\ t: y=-x+2;\ \ \gamma: x^2+y^2-8x-12y+20=0\right]$$

PROBLEMA 8. PARABOLA + CORCONFERENZA

Data la parabola di fuoco $F(2\,;-3)$ e direttrice $y=-4$, scrivere l'equazione della circonferenza avente il centro coincidente col vertice della parabola e raggio uguale alla distanza tra il vertice della parabola stessa e il punto di tangenza con la retta $y=-2x-\dfrac{3}{2}$.

$$\left[4x^2+4y^2-16x+28y+33=0\right]$$

PROBLEMA 9. IPERBOLE EQUILATERA

Per i punti comuni alla retta $x-y+2=0$ ed all'iperbole $xy=3$, condurre le tangenti alla curva e calcolare il perimetro e l'area del quadrilatero con i vertici nei punti in cui le tangenti incontrano gli assi coordinati.

$$\left[x+3y+6=0\ ;\ 3x+y-6=0\ \ ;\ 2p=4\sqrt{10}+8\sqrt{2}\ \ ;\ \ S=32\right]$$

PROBLEMA 10. PARABOLA + CORCONFERENZA

Data la circonferenza di centro $C(3\,;3)$ e raggio $\sqrt{17}$, scrivere l'equazione della parabola $y=ax^2+bx+c$ di vertice nel punto C e passante per uno dei punti di intersezione della circonferenza con la retta $y=4$.

$$\left[y=\frac{1}{16}x^2-\frac{3}{8}x+\frac{57}{16}\right]$$

PROBLEMA 11. PARABOLA + CORCONFERENZA

Determinare le coordinate dei punti comuni alla parabola passante per i punti $(0\,;1)$, $(1\,;-3)$, $(-1\,;9)$ e alla retta $3x-y-8=0$. Scrivere poi l'equazione della circonferenza che ha per diametro la corda intercettata sulla predetta retta e trovare le sue ulteriori intersezioni con la parabola.

$$\left[\left(\frac{3}{2};\ -\frac{7}{2}\right);(3;1)\ ;\ 2x^2+2y^2-9x+5y+2=0\right]$$

PROBLEMA 12. ELLISSE + PARABOLA

In un piano riferito ad un sistema cartesiano xOy determinare l'equazione dell'ellisse riferita ai suoi assi di simmetria conoscendo i fuochi $\left(\pm 2\sqrt{2}\ ;0\right)$ e un punto $\left(-\sqrt{5}\ ;-\dfrac{2}{3}\right)$.Successivamente si determini l'equazione della parabola $y=ax^2+bx+c$ tangente all'asse x nell'estremo A (di ascissa positiva) dell'asse maggiore dell'ellisse e passante per l'estremo B (di ordinata positiva) dell'asse minore. Condurre infine la tangente in B alla parabola e calcolare il punto C d'intersezione di quest'ultima con l'ellisse.

$$\left[x^2+9y^2-9=0;\ y=\frac{1}{9}(x-3)^2\ ;\ y=-\frac{2}{3}x+1;\ C\left(\frac{12}{5};-\frac{3}{5}\right)\right]$$

PROBLEMA 13. PARABOLA + CORCONFERENZA + AREA

Dati i punti $A(-3\,;4)$ e $B(3\,;4)$, scrivere l'equazione della circonferenza con centro nell'origine e passante per A (o per B) e quella della parabola avente l'asse coincidente con quello delle y , passante per A (o per B) ed avente per direttrice la retta di equazione $y=-\dfrac{21}{4}$, verificando che la parabola è tangente alla circonferenza. Indicati con C e D i due punti della circonferenza di ascissa nulla, con C di ordinata positiva, e con P e Q due punti del diametro CD e simmetrici rispetto ad O, calcolare le coordinate di P e Q in modo che sia 18 l'area del quadrilatero $APBQ$.

$$\left[x^2+y^2-25=0;\ \text{la parabola è tangente alla circonf. in } D(0;\ -5);\ C(0;5)\ ;\ \ P(0;3)\ \ Q(0;-3)\right]$$

PROBLEMA 14. PARABOLA + CORCONFERENZA

Scrivere l'equazione della parabola avente come asse la retta $x = 3$, passante per il punto $\left(2\,;\frac{1}{2}\right)$ e tangente all'asse x e quella della circonferenza avente il centro sulla retta di equazione $5x - 8y = 0$, passante per il punto $\left(2\,;\frac{9}{2}\right)$ e di raggio $2\sqrt{2}$. Dopo aver disegnato i grafici delle due curve, determinare la retta parallela all'asse x la quale, incontrando la parabola in P e Q e la circonferenza in S e T, sia tale che si abbia : $ST : PQ = 2 : 3$.

$$\left[y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{9}{2};\ 4x^2 + 4y^2 - 32x - 20y + 57 = 0;\ \ y = \frac{9}{2}\right]$$

PROBLEMA 15. PARABOLA + RETTA TANG. + CORCONFERENZA + AREA

Una parabola del tipo $x = -y^2 + c$ è tangente in $A\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e in $B\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ad una circonferenza del tipo $x^2 + y^2 = r^2$. Dopo aver calcolato i coefficienti r e c, si conduca la perpendicolare in B alla tangente comune alle due curve e, dopo aver indicato con E e F, rispettivamente, le sue ulteriori intersezioni con la circonferenza e con la parabola, si calcoli il rapporto tra le due corde BE e BF.

$$\left[r = 1;\ c = \frac{5}{4};\ \text{retta perpend. in } B : y = -\sqrt{3}x;\ E\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right);\ F\left(-\frac{5}{6}; \frac{5}{6}\sqrt{3}\right)\ \ \overline{BE} = 2\ \ \overline{BF} = \frac{8}{3};\ \ \text{rapporto} = \frac{3}{4}\right]$$

PROBLEMA 16. PARABOLA + CORCONFERENZA

Data la parabola, del tipo $y = ax^2 + bx + c$, avente vertice nel punto $V(4\,; -9)$ e passante per il punto $P(1\,;0)$, trovare le sue intersezioni A e B con la retta $y = x - 7$. Scrivere l'equazione della circonferenza avente il centro sull'asse x e tangente al segmento AB nel suo punto medio M. Detto D il punto della circonferenza di ordinata $\frac{1}{2}$ e appartenente al secondo quadrante, mandare da D la retta r parallela alla retta $5x - 3y = 0$; r taglia l'asse y nel punto E. Tracciare da E le tangenti alla circonferenza e alla parabola e scriverne le equazioni.

$$\left[y = x^2 - 8x + 7\right]$$

PROBLEMA 17. PARABOLA + CORCONFERENZA

Il punto $C(2\,;3)$ è centro di una circonferenza tangente alla retta t di equazione $y = x - 1$. Se ne trovi l'equazione. Siano A e B $(x_A < x_B)$ gli estremi del diametro parallelo alla tangente t. Si scrivano le equazioni delle rette passanti rispettivamente per A e B e che intersecano la t sull'asse x in H. Si individui la parabola che ha come asse la retta AH ed è tangente alla BH in B. Si determino le intersezioni tra le due curve. Detto C il punto della parabola di ascissa nulla, si trovi sull'arco CB della parabola un punto P in modo che la misura dell'area del triangolo PBC sia $\frac{\sqrt{2}}{2}$ nel rapporto con quella del del triangolo ABH.

PROBLEMA 18. PARABOLA + CORCONFERENZA

Si scrivano le equazioni delle parabole che hanno asse di equazione $x = 2$, passino per il punto $A(1\,;0)$ ed hanno il vertice che dista $\sqrt{5}$ da A. Si operi poi la traslazione:

$$\begin{cases} x = X + 2 \\ y = Y \end{cases}$$

Nel nuovo sistema di riferimento si scrivano le equazioni delle parabole e quella della circonferenza con centro nell'origine e passante per i vertici delle parabole stesse e siano M, N, M', N' le sue intersezioni (non coincidenti con i vertici) con le parabole. Si calcoli infine la misura della lunghezza della diagonale del rettangolo $MNM'N'$.