La circonferenza nel piano cartesiano

1. Definizione ed equazione.

Si chiama circonferenza *C*, di centro C(α, β) e raggio *r*, l'insieme di tutti e soli i punti del piano che hanno distanza *r* da C.

L'equazione della circonferenza di centro C(α, β) e raggio *r* è la seguente:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2.$$

Svolgendo tutti i calcoli e ponendo $-2\alpha = a$, $-2\beta = b$ e $\alpha^2 + \beta^2 - r^2 = c$ si avrà l'equazione canonica della circonferenza $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

Le coordinate del centro sono $\alpha = -\frac{a}{2}$; $\beta = -\frac{b}{2}$;
il raggio è $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$ con la condizione $a^2 + b^2 - 4c \geq 0$.

Se:
$a^2 + b^2 - 4c > 0$ si ha una circonferenza reale;
$a^2 + b^2 - 4c = 0$ la circonferenza degenera nel punto C, centro della circonferenza;
$a^2 + b^2 - 4c < 0$ non si ha alcuna circonferenza reale.

2. Posizioni relative retta – circonferenza.

Ricerca dei punti di intersezione tra la retta *t* e circonferenza *C*.

$$\begin{cases} y = mx + q & \text{equazione della retta t} \\ x^2+y^2+ax+by+c = 0 & \text{equazione della circonferenza } C \end{cases}$$

Sostituendo l'equazione della retta nella circonferenza si ottiene un'equazione di 2° grado in x, si calcola il Δ e si ottiene uno dei seguenti casi:

- $\Delta > 0$ RETTA SECANTE $\rightarrow$ due punti distinti di intersezione, P e Q
- $\Delta = 0$ RETTA TANGENTE $\rightarrow$ due punti coincidenti di intersezione P$\equiv$Q
- $\Delta < 0$ RETTA ESTERNA $\rightarrow$ nessuna intersezione.

Rette tangenti ad una circonferenza

- $P(x_0;y_0)$ interno alla circonferenza *C* $\rightarrow$ nessuna tangente per P
- $P(x_0;y_0)$ giace sulla circonferenza *C* $\rightarrow$ una sola tangente per P
- $P(x_0;y_0)$ esterno alla circonferenza *C* $\rightarrow$ due rette tangenti per P

Nel secondo caso l'equazione dell'unica tangente si può ottenere con *la regola dello sdoppiamento*:

$$xx_0 + yy_0 + a\frac{x+x_0}{2} + b\frac{y+y_0}{2} + c = 0$$

essendo $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ l'equazione di *C* e $P(x_0;y_0)$ il punto appartenente a *C*.

Nel terzo caso le equazioni delle tangenti si ottengono con uno dei seguenti metodi.

1° metodo
Si impone che la distanza tra il centro C della circonferenza e la retta generica passante per $P(x_0;y_0)$, $y-y_0=m(x-x_0)$, sia uguale al raggio di *C*: si ottiene una equazione in *m* che, risolta, fornisce m_1 ed m_2 , coefficienti angolari delle rette tangenti t_1 e t_2 .

2° metodo
Si imposta il sistema tra l'equazione della circonferenza e la retta generica per P; ottenuta per sostituzione l'equazione di 2° grado, se ne calcola il Δ e si impone che sia uguale a zero (la condizione $\Delta = 0$ è detta "condizione di tangenza"): ciò fornisce l'equazione in *m* che, risolta, porta ad ottenere m_1 ed m_2 coefficienti angolari delle rette tangenti t_1 e t_2.

Osservazione.
Il 1° e il 2° metodo possono anche essere usati per il caso in cui P appartiene alla circonferenza.

3. Posizioni relative di due circonferenze.

Ricerca dei punti di intersezione tra due circonferenze C_1 e C_2.

$x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0$ è l'equazione della circonferenza C_1 di raggio r_1
$x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0$ è l'equazione della circonferenza C_2 di raggio r_2

Sottraendo a membro a membro si ha
$(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)x + (c_1 - c_2) = 0$ (equazione di una retta detta "asse radicale")
con $a_1 \neq a_2$ e $b_1 \neq b_2$.

Sostituendo l'equazione dell'asse radicale in una delle due equazioni delle circonferenze si ha un'equazione di 2° grado in x o in y.
Si calcola il Δ e si ottiene uno dei seguenti tre casi:

- $\Delta > 0$ CIRCONFERENZE SECANTI $\rightarrow$ due punti distinti P_1 e P_2, retta r secante
- $\Delta = 0$ CIRCONFERENZE TANGENTI $\rightarrow$ due punti coincidenti $P_1 \equiv P_2$, retta r tangente
- $\Delta < 0$ CIRCONFERENZE ESTERNE O INTERNE $\rightarrow$ nessun punto in comune, la retta r non incontra le circonferenze.

4. Determinazione dell'equazione della circonferenza

E' possibile determinare l'equazione di una circonferenza noti alcuni elementi. I casi che si presentano più di frequente sono i seguenti:

- Sono noti il centro C e le coordinate di un punto P per cui passa la circonferenza.
  Determino il raggio come distanza tra C e P e uso la formula $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$.

- Sono note le coordinate degli estremi A e B di un diametro.
  Determino il centro come punto medio del segmento AB; il raggio, invece, è metà della distanza AB. Anche in questo caso uso la formula $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$.

- Sono note le coordinate di tre punti per cui passa la circonferenza.
  Impongo ai tre punti di appartenere alla circonferenza, sostituendo le loro coordinate nell'equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Ottengo così un sistema di tre equazioni in tre incognite (a, b, c) che risolto mi fornisce i coefficienti della circonferenza.

ESEMPI

1) Determinare l'equazione della circonferenza di centro C(1;-2) che passa per il punto P(2;3).
   Essendo:
   r = PC = $\sqrt{1^2+5^2} = \sqrt{26}$, l'equazione richiesta è $(x-1)^2+(y+2)^2=26$

2) Determinare l'equazione della circonferenza passante per A(1;2), B(3;-2), C(5;1).
   L'equazione cercata è del tipo:
$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

che, dovendo essere soddisfatta dalle coordinate dei tre punti, da luogo al sistema

$$\begin{cases} 1+4+a+2b+c=0 \\ 9+4+3a-2b+c=0 \\ 25+1+5a+b+c=0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si trova $a = -\frac{38}{7}$; $b = -\frac{5}{7}$; $c = \frac{13}{7}$.

Pertanto, l'equazione della circonferenza richiesta è: $7x^2+7y^2-38x-5y+13=0$

3) Data la circonferenza di equazione $x^2+y^2 = 4$, condurre le tangenti dal punto $A(0 ; -2\sqrt{2})$.

Metodo 1

La retta generica passante per A ha equazione $y + 2\sqrt{2} = m (x – 0)$ che in forma implicita è:

$m x – y - 2\sqrt{2} = 0$

$d = r \rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{m^2+1}} = 2 \rightarrow \sqrt{2} = \sqrt{m^2+1} \rightarrow m^2 = 1 \rightarrow m = \pm 1$….

Metodo 2

Imposto il sistema formato dall' equazione della retta e della circonferenza, si ha:

$$\begin{cases} y + 2\sqrt{2} = m\,x \\ x^2+y^2 = 4 \end{cases}$$

Ricavando y dalla 1° equazione e sostituendolo nella seconda si ottiene l'equazione $(1+m^2)\, x^2 - 4\sqrt{2}\, m\, x + 4 = 0$ di cui calcolo il discriminante che pongo uguale a zero.

$\Delta=0 \rightarrow 8m^2 – 4\,(1+m^2) = 0 \rightarrow m^2 = 1 \rightarrow m = \pm 1$.

Il punto A è esterno alla circonferenza $\rightarrow$ due tangenti: $y = x - 2\sqrt{2}$ ed $y = -x - 2\sqrt{2}$.

4) Dire se l' equazione $x^2+y^2+2x-4y+8=0$ rappresenta una circonferenza.

Poichè $a^2+b^2 - 4c = 4+16-32<0$, l'equazione non rappresenta una circonferenza.

ESERCIZI

1) Stabilire quale delle seguenti equazioni rappresenta una circonferenza e in caso affermativo determinare le coordinate del centro e del raggio.

   a) $2x^2+2y^2+6x+3y-10 = 0$;

   b) $x^2+y^2-4x-5y+28 = 0$

2) Determinare l'equazione della circonferenza di centro C e raggio *r*:

   a) C(0;0) ; $r = 2$;

   b) C(-2;1) ; $r = 1$;

   c) $C(-\sqrt{5};-\frac{3}{4})$; $r = \frac{1}{2}\sqrt{29}$.

3) Determinare l'equazione della circonferenza di diametro AB con A(1;2) e B(-3;-4).

4) Determinare l'equazione della circonferenza passante per A(2;2) e B(5;1) e C(6;4).

5) Determinare l'equazione della circonferenza di raggio 5 e passante per A(5;-3) e B(4;-2).

6) Data la circonferenza di equazione $x^2+y^2-2x+4y-20=0$, determinare l'equazione della circonferenza ad essa concentrica e passante per il punto (3;-1).

7) Determinare l'equazione della circonferenza i cui punti A(0;-5) e B(5;0) sono gli estremi di un diametro.

8) Determinare le equazioni delle rette tangenti condotte dal punto P(-3;0) alla circonferenza di equazione $x^2+y^2-4x-6y+8=0$.

9) Determinare l'equazione della circonferenza che passa per il punto P(-3;4) ed è concentrica alla circonferenza $x^2+y^2+3x-4y-1=0$. Determinare inoltre l'equazione della retta tangente alla circonferenza trovata nel punto P.

10) Date le circonferenze $x^2+y^2-6x+2y+2=0$ e $x^2+y^2-14x-6y+50=0$,calcolare:
    a) gli eventuali punti di intersezione;
    b) l'asse radicale.

11) Trovare l'equazione della circonferenza che passa per i punti O(0;0), A(4;0), B(0;6) e le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza in questi tre punti.

12) Trovare l'equazione della retta tangente alla circonferenza $x^2+y^2-4x+8y=0$ nell'origine degli assi.

13) Scrivere l'equazione della circonferenza di centro (4;3), tangente all'asse x.

14) Scrivere l'equazione della circonferenza che passa per l'origine ed ha centro nel punto d'intersezione delle due rette $x-3y-7=0$ e $2x+5y-3=0$.

15) Determinare l'equazione della circonferenza di centro C(-4;3) passante per P(0;1).