CAPITOLO

10

I sistemi lineari

Internet

Più della metà delle famiglie in Italia dispone di una connessione ADSL e il numero è in continua crescita. L'offerta di tariffe e tecnologie dei gestori telefonici è sempre più ampia…

…come scegliere il contratto più conveniente?

La risposta a pag. 719

1. I sistemi di due equazioni in due incognite

Le equazioni lineari in due incognite

Consideriamo l'equazione $3x - 5y - 4 = 0$.

Si tratta di un'equazione di primo grado in due incognite, ovvero di un'equazione **lineare** in due incognite.

Una **soluzione** dell'equazione è una *coppia* di valori $(x; y)$ che rende il primo membro uguale al secondo.

Per esempio, la coppia ordinata $\left(0; -\frac{4}{5}\right)$ è una soluzione; per verificarlo basta sostituire, nell'equazione, a x il valore 0, a y il valore $-\frac{4}{5}$ e controllare che l'uguaglianza risulti soddisfatta.

Per trovare altre soluzioni è sufficiente assegnare un qualsiasi valore a x e poi risolvere rispetto a y l'equazione così ottenuta. Per esempio, se poniamo $x = 13$, l'equazione diventa:

$$39 - 5y = 4 \rightarrow -5y = 4 - 39 \rightarrow -5y = -35 \rightarrow y = \frac{35}{5} = 7.$$

Ricavando y, abbiamo ottenuto $y = 7$.

La coppia ordinata $(13; 7)$ è soluzione dell'equazione.

Possiamo trovare altre soluzioni allo stesso modo, attribuendo diversi valori a x e ricavando i rispettivi valori di y.
Poiché le coppie $(x; y)$ che soddisfano l'equazione sono infinite, ogni equazione lineare in due incognite è *indeterminata*.

Dire che le soluzioni sono infinite non significa dire che qualunque coppia di numeri è soluzione dell'equazione. Per esempio, la coppia $(1; 1)$ non è soluzione di

$3x - 5y - 4 = 0$.

I sistemi di due equazioni lineari in due incognite

Consideriamo, oltre all'equazione

$$3x - 5y - 4 = 0,$$

la seguente:

$$x - 2y = -1.$$

Ciascuna delle due equazioni considerate ha infinite soluzioni. Ma esistono soluzioni comuni a entrambe? Cioè, esistono coppie ordinate $(x; y)$ di valori che soddisfano **contemporaneamente** le due equazioni?

«Mettere a *sistema*» le due equazioni significa chiedersi esattamente questo.

DEFINIZIONE

Sistema di equazioni

Un sistema di equazioni è un insieme di equazioni in cui compaiono le stesse incognite, per le quali ci chiediamo quali sono le soluzioni comuni.

Per indicare un sistema, si scrivono le equazioni in colonna, racchiuse da una parentesi graffa:

$$\begin{cases} 3x - 5y - 4 = 0 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

Le soluzioni comuni a tutte le equazioni sono le **soluzioni del sistema**.
Si dice che un **sistema** è **impossibile** se non ha soluzioni, che è **determinato** se ha un numero finito di soluzioni, che è **indeterminato** se ha un numero infinito di soluzioni.

Così come un'equazione di primo grado è anche detta «lineare», un sistema formato soltanto da equazioni di primo grado è detto **sistema lineare**.
Per il momento ci occupiamo solo di sistemi lineari di due equazioni in due incognite.

Se una coppia di numeri reali è soluzione di un sistema, allora sostituendo i due numeri al posto delle incognite in entrambe le equazioni del sistema si ottengono due uguaglianze vere. Per esempio, il sistema

$$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 4x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

ha come soluzione la coppia di numeri $(1; 3)$, perché per $x = 1$ e $y = 3$ sono soddisfatte tutte e due le equazioni.
La coppia $(0; 0)$ **non** è soluzione del sistema, perché soddisfa la prima equazione ma non la seconda.

Il grado di un sistema

DEFINIZIONE

Grado di un sistema

Il grado di un sistema di equazioni algebriche intere è il prodotto dei gradi delle singole equazioni che lo compongono.

ESEMPIO

Il sistema

$$\begin{cases} 3x - 2y + 1 = 0 \\ 4x - 5y = -2 \end{cases}$$

è di primo grado, perché è formato da due equazioni di primo grado; il prodotto dei gradi è dunque $1 \cdot 1 = 1$.

▶ Il grado del sistema

$$\begin{cases} 3x^2 - 2xy + 3 = 0 \\ 7x - xy = 0 \end{cases}$$

è 4.
Perché?

Facendo uso dei princìpi di equivalenza delle equazioni, possiamo sempre scrivere un sistema lineare, equivalente a quello dato, in **forma normale**, cioè nella forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$$

dove i valori a, a_1 e b, b_1 indicano, rispettivamente, i **coefficienti** delle incognite x e y, e dove c e c_1 indicano i **termini noti** delle due equazioni.

▶ Due sistemi sono equivalenti se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

▶ a, a_1, b, b_1, c, c_1 sono numeri reali.

2. Il metodo di sostituzione

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V29a

Dopo averlo ridotto in forma normale applicando i princìpi di equivalenza delle equazioni, per risolvere un sistema si possono utilizzare diversi metodi.

Cominciamo esaminando il **metodo di sostituzione**.

ESEMPIO

Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} x + 5y = 3 \\ 2x - 4y = -8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 5y = 3 \\ 2x - 4y = -8 \end{cases} \longrightarrow x = \boxed{3 - 5y}$$

a. Ricaviamo x dalla prima equazione.

$$\begin{cases} x + 5y = 3 \\ 2\boxed{(3 - 5y)} - 4y = -8 \end{cases}$$

b. Sostituiamo a x nella seconda equazione l'espressione trovata.

$$\begin{cases} x + 5y = 3 \\ 6 - 10y - 4y = -8 \longrightarrow -14y = -14 \longrightarrow y = \boxed{1} \end{cases}$$

c. Ricaviamo il valore di y dalla seconda equazione.

$$\begin{cases} x + 5 \cdot \boxed{1} = 3 \longrightarrow x = 3 - 5 = -2 \\ y = 1 \end{cases}$$

d. Sostituiamo a y nella prima equazione il valore trovato e calcoliamo x.

▲ Figura 1

La coppia $(-2; 1)$ è la soluzione del sistema.

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V30a

3. I sistemi determinati, impossibili, indeterminati

I sistemi determinati

Un sistema si dice **determinato** quando ha un numero finito di soluzioni. In particolare, si può dimostrare che un sistema lineare e determinato ha una sola soluzione.

ESEMPIO

Il sistema precedente $\begin{cases} x + 5y = 3 \\ 2x - 4y = -8 \end{cases}$ è determinato e la sua soluzione è la coppia di numeri reali $(-2; 1)$.

Osserviamo che il rapporto fra i coefficienti di x, cioè $\frac{1}{2}$, è diverso dal rapporto fra i coefficienti di y, che vale $-\frac{5}{4}$.

▶ $\begin{cases} 1x + 5y = 3 \\ 2x - 4y = -8 \end{cases}$

Consideriamo un generico sistema scritto in forma normale:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases} \quad \text{con } a, a_1, b, b_1 \neq 0.$$

Esso è **determinato** quando il rapporto fra i coefficienti di x, $\frac{a}{a_1}$, è diverso dal rapporto fra i coefficienti di y, $\frac{b}{b_1}$, ossia quando:

$$\boldsymbol{\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}}.$$

▶ Questa affermazione può essere dimostrata; noi qui diamo solo una giustificazione grafica.

Interpretazione grafica

Nel piano cartesiano, ogni equazione lineare in due incognite individua una retta. È quindi possibile dare un'interpretazione grafica anche dei sistemi lineari di due equazioni in due incognite x e y.

▶ Ogni coppia $(x; y)$ soluzione di un'equazione lineare corrisponde a un punto e tali punti sono tutti e solo i punti di una retta.

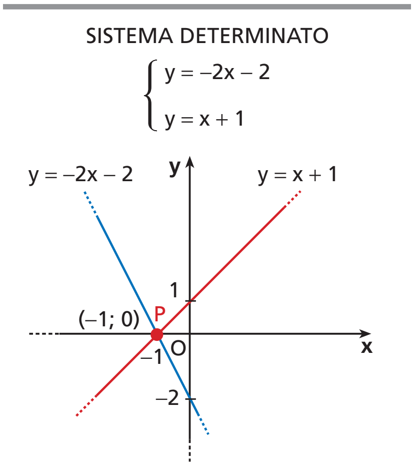
ESEMPIO

Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -2x - 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Ciascuna equazione del sistema ha per soluzioni le coordinate $(x; y)$ dei punti della retta che la rappresenta.

$(-1; 0)$, unica soluzione del sistema, è l'unico punto in comune alle due rette.



▶ **Figura 2** Le rette di equazioni $y = x + 1$ e $y = -2x - 2$ si intersecano nel punto $P(-1; 0)$: il sistema è determinato e la sua soluzione è la coppia $(-1; 0)$ delle coordinate di P.

In generale, consideriamo le rette r e s di equazioni

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 & \text{retta } r \\ a_1x + b_1y + c_1 = 0 & \text{retta } s \end{cases}$$

Esplicitiamo le due equazioni, supponendo che a, a_1, b, b_1 siano non nulli:

$$\begin{cases} by = -ax - c \\ b_1y = -a_1x - c_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b} \\ y = -\dfrac{a_1}{b_1}x - \dfrac{c_1}{b_1} \end{cases}$$

Le rette r e s sono scritte così in forma esplicita.

Le rette r e s si intersecano se non sono parallele, cioè se hanno coefficienti angolari diversi, ovvero se

$$-\frac{a}{b} \neq -\frac{a_1}{b_1}.$$

Moltiplichiamo entrambi i membri per $-\dfrac{b}{a_1}$:

$$-\frac{a}{b} \cdot \left(-\frac{b}{a_1}\right) \neq -\frac{a_1}{b_1} \cdot \left(-\frac{b}{a_1}\right) \rightarrow \frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}.$$

Tale condizione si può anche scrivere $\boldsymbol{ab_1 \neq a_1b}$ o anche $\boldsymbol{ab_1 - a_1b \neq 0}$.

Quest'ultima formulazione ha senso anche nel caso in cui qualcuno dei coefficienti a, b_1, a_1, b sia nullo.

I sistemi impossibili

Un sistema è **impossibile** quando non ammette soluzioni.

ESEMPIO

Risolviamo il seguente sistema con il metodo di sostituzione:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1 + 3y}{2} \\ 2 \cdot \dfrac{1 + 3y}{2} - 3y = 7 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1 + 3y}{2} \\ 1 + 3y - 3y = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1 + 3y}{2} \\ 0 \cdot y = 6 \end{cases}$$

Poiché siamo giunti a un'equazione impossibile, il sistema non ha soluzione; quindi è impossibile.

Osserviamo che nel sistema considerato il rapporto fra i coefficienti di x, $\dfrac{2}{2}$, è uguale al rapporto fra i coefficienti di y, $\dfrac{-3}{-3}$, mentre tale rapporto è diverso da quello fra i termini noti, $\dfrac{1}{7}$.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases}$$

Consideriamo un generico sistema scritto in forma normale:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases} \qquad \text{con } a, a_1, b, b_1 \neq 0.$$

Esso è **impossibile** quando il rapporto fra i coefficienti di x, $\frac{a}{a_1}$, è uguale al rapporto fra i coefficienti di y, $\frac{b}{b_1}$, e tale rapporto è diverso dal rapporto fra i termini noti, $\frac{c}{c_1}$, ossia:

$$\boldsymbol{\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} \neq \frac{c}{c_1}}.$$

Questa condizione si può anche scrivere come $\boldsymbol{ab_1 - a_1b = 0}$ e $\boldsymbol{b_1c - bc_1 \neq 0}$, e tale formulazione può essere utilizzata anche quando qualcuno dei coefficienti a, b, a_1, b_1, c, c_1 è nullo.

Osservazione. Nel caso particolare dell'esempio, potevamo giungere alla conclusione che il sistema dato è impossibile senza effettuare calcoli. Bastava infatti osservare che il sistema è formato da due equazioni che differiscono fra loro solo per il termine noto: per nessun valore di x e di y il binomio $2x - 3y$ può essere uguale a 1 e contemporaneamente anche a 7! Il sistema è dunque impossibile.

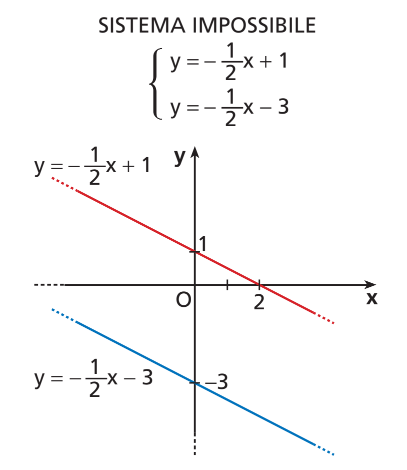
Interpretazione grafica

ESEMPIO

Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{2}x + 1 \\ y = -\dfrac{1}{2}x - 3 \end{cases}$$

Mediante interpretazione grafica possiamo dire che è impossibile. Infatti, le due equazioni individuano rispettivamente due rette con uguale coefficiente angolare e differente termine noto, ossia parallele e distinte.



▶ **Figura 3** Le rette di equazione $y = -\frac{1}{2}x + 1$ e $y = -\frac{1}{2}x - 3$ sono parallele e distinte, quindi non si incontrano in alcun punto: il sistema è impossibile.

Per passare al caso generale, consideriamo di nuovo le rette di equazione:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b} & \text{retta } r \\ y = -\dfrac{a_1}{b_1}x - \dfrac{c_1}{b_1} & \text{retta } s \end{cases}$$

Le rette r e s sono parallele e distinte se hanno uguali i coefficienti angolari ma diversi i termini noti, cioè se:

$$-\frac{a}{b} = -\frac{a_1}{b_1} \quad \text{e} \quad -\frac{c}{b} \neq -\frac{c_1}{b_1}.$$

La prima condizione, come abbiamo visto, equivale a:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}.$$

Moltiplicando entrambi i membri della seconda condizione per $-\frac{b}{c_1}$ ed eseguendo le semplificazioni, si ottiene:

$$\frac{c}{c_1} \neq \frac{b}{b_1}.$$

Le due condizioni messe assieme danno:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} \neq \frac{c}{c_1}.$$

Questa è proprio la condizione di «sistema impossibile».

$$-\frac{c}{b}\left(-\frac{b}{c_1}\right) \neq -\frac{c_1}{b_1}\left(-\frac{b}{c_1}\right)$$

I sistemi indeterminati

Un sistema è **indeterminato** quando ha infinite soluzioni.

ESEMPIO

Risolviamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} 5x - 2y = 1 \\ 15x - 6y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1+2y}{5} \\ 15 \cdot \dfrac{1+2y}{5} - 6y = 3 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1+2y}{5} \\ 3 + 6y - 6y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1+2y}{5} \\ 0 \cdot y = 0 \end{cases}$$

Poiché siamo giunti a un'equazione indeterminata, il sistema ha infinite soluzioni; quindi è indeterminato.

Osserviamo che nel sistema considerato i rapporti fra i coefficienti di x, quelli di y e fra i termini noti sono uguali:

$$\frac{5}{15} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}.$$

L'equazione

$$0 \cdot y = 0$$

ha infinite soluzioni; attribuendo a y un valore qualsiasi e sostituendolo nell'equazione

$$x = \frac{1+2y}{5},$$

si ottengono infinite soluzioni.

$$\begin{cases} 5x - 2y = 1 \\ 15x - 6y = 3 \end{cases}$$

Un generico sistema scritto in forma normale,

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases} \text{con } a, a_1, b, b_1 \neq 0,$$

è **indeterminato** quando il rapporto fra i coefficienti di x, $\frac{a}{a_1}$, è uguale al rapporto fra i coefficienti di y, $\frac{b}{b_1}$, e al rapporto fra i termini noti, $\frac{c}{c_1}$, ossia:

$$\boldsymbol{\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}}.$$

La condizione si può scrivere nella forma $\boldsymbol{ab_1 - a_1b = 0}$ e $\boldsymbol{b_1c - bc_1 = 0}$, che ha senso anche quando qualcuno dei coefficienti a, a_1, b, b_1, c, c_1 è nullo.

Osservazione. Nel caso particolare dell'esempio, potevamo giungere alla conclusione che il sistema è indeterminato senza risolverlo. Basta infatti osservare che, moltiplicando per 3 entrambi i membri della prima equazione, otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} 15x - 6y = 3 \\ 15x - 6y = 3 \end{cases}$$

Il sistema risulta formato da due equazioni equivalenti. Le soluzioni del sistema sono dunque tutte le infinite coppie di valori che soddisfano l'equazione in due incognite $15x - 6y = 3$: il sistema è indeterminato.

In sintesi

Il sistema

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$$

è

- **determinato** se $\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}$
- **impossibile** se $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} \neq \frac{c}{c_1}$
- **indeterminato** se $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$

Interpretazione grafica

ESEMPIO

Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ 3y = 6x + 3 \end{cases}$$

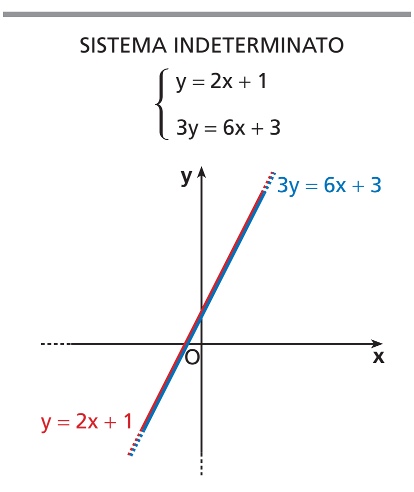
Se scriviamo le due equazioni del sistema in forma esplicita, ci accorgiamo che coincidono:

$$y = 2x + 1 \quad (1^a \text{ equazione});$$

$$3y = 6x + 3 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{3y}{3} = \frac{6x}{3} + \frac{3}{3} \rightarrow$$

$$\rightarrow y = 2x + 1 \quad (2^a \text{ equazione}).$$



▶ **Figura 4** Le rette di equazioni $y = 2x + 1$ e $3y = 6x + 3$ coincidono: il sistema è indeterminato. Le sue soluzioni sono le infinite coppie costituite dalle coordinate dei punti della retta.

Pertanto coincidono anche le rette che tali equazioni individuano: le infinite soluzioni del sistema sono le coordinate degli infiniti punti in comune alle due rette.

In generale, consideriamo le equazioni delle rette r e s:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b} & \text{retta } r \\ y = -\dfrac{a_1}{b_1}x - \dfrac{c_1}{b_1} & \text{retta } s \end{cases}$$

Le due rette r e s coincidono se hanno lo stesso coefficiente angolare e lo stesso termine noto, cioè se

$$-\frac{a}{b} = -\frac{a_1}{b_1} \quad \text{e} \quad -\frac{c}{b} = -\frac{c_1}{b_1};$$

le due condizioni si riconducono, con passaggi analoghi a quelli già visti, a:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}.$$

Questa è la condizione di «sistema indeterminato».

4. Il metodo del confronto

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V29b

Risolviamo un sistema lineare con il **metodo del confronto**.

ESEMPIO

Risolviamo il sistema: $\begin{cases} 5x + y = -2 \\ 2x - y = 16 \end{cases}$

$$\begin{cases} 5x + y = -2 \\ 2x - y = 16 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} y = \boxed{-2 - 5x} \\ -y = 16 - 2x \\ y = \boxed{-16 + 2x} \end{array}$$

a. Ricaviamo y dalle due equazioni.

$$\begin{cases} \boxed{-2 - 5x} = \boxed{-16 + 2x} \\ y = -16 + 2x \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{r} -5x - 2x = -16 + 2 \\ -7x = -14 \\ x = 2 \end{array}$$

b. Uguagliamo le due espressioni di y: otteniamo un'equazione nella sola incognita x, che risolviamo.

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -16 + 2 \cdot 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} y = -16 + 4 \\ y = -12 \end{array}$$

c. Sostituiamo a x il valore 2 nella seconda equazione e ricaviamo y.

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -12 \end{cases}$$

d. La soluzione del sistema è una sola ed è $(2; -12)$.

▲ **Figura 5** Nelle due equazioni invece di y, possiamo anche ricavare x.

La coppia $(2; -12)$ è la soluzione del sistema.

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V31a

5. Il metodo di riduzione

Il metodo di riduzione è anche detto **metodo di addizione e sottrazione**, perché per applicarlo è necessario sommare (o sottrarre) membro a membro le equazioni del sistema.

ESEMPIO

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} 3x - 4y = 27 \\ 2x + 8y = -14 \end{cases}$$

Per eliminare l'incognita y moltiplichiamo i due membri della prima equazione per 2 e sommiamo le equazioni membro a membro:

▶ Applichiamo il secondo e il primo principio di equivalenza delle equazioni.

$$\cdot 2 \begin{cases} 6x - 8y = 54 \\ 2x + 8y = -14 \end{cases} \rightarrow \quad + \begin{cases} 6x - 8y = 54 \\ 2x + 8y = -14 \end{cases} \rightarrow$$

$$\overline{8x \qquad = 40}$$

$$\rightarrow x = \frac{40}{8} = 5.$$

Per determinare il valore di y, sostituiamo il valore trovato per l'incognita x in una delle due equazioni e ricaviamo y:

▶ In alternativa, è possibile utilizzare il metodo di riduzione, moltiplicando la prima equazione per 2 e la seconda per 3 e sottraendo poi membro a membro.

$$\begin{cases} x = 5 \\ 2 \cdot 5 + 8y = -14 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ 8y = -24 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \end{cases}$$

La soluzione del sistema è $(5; -3)$.

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V32a

6. Il metodo di Cramer

Si può vedere (per esempio con il metodo di riduzione) che la soluzione del sistema

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$$

è data dalle formule:

$$x = \frac{b_1c - bc_1}{ab_1 - a_1b} \quad \text{e} \quad y = \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b}, \quad \text{con } ab_1 - a_1b \neq 0.$$

Esaminiamo ora un metodo semplice per ricordare queste formule. Utilizzeremo i determinanti.

Chiamiamo **determinante** D del sistema il numero definito da:

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = ab_1 - ba_1.$$

▶ Ecco un esempio numerico di calcolo di determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 1 \cdot 3 = 7.$$

Analogamente possiamo scrivere altri due determinanti.

1. Determinante D_x: nella prima colonna del determinante del sistema sostituiamo i termini noti ai coefficienti di x. Scriviamo quindi:

$$D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix} = cb_1 - bc_1.$$

2. Determinante D_y: nella seconda colonna del determinante del sistema sostituiamo i termini noti ai coefficienti di y. Scriviamo quindi:

$$D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} = ac_1 - ca_1.$$

Riscriviamo le soluzioni del sistema utilizzando i determinanti:

$$x = \frac{b_1c - bc_1}{ab_1 - a_1b} = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}} = \frac{D_x}{D} \to \boxed{\boldsymbol{x = \frac{D_x}{D}}}$$

$$y = \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b} = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}} = \frac{D_y}{D} \to \boxed{\boldsymbol{y = \frac{D_y}{D}}}.$$

Le frazioni che esprimono la soluzione $(x; y)$ hanno senso, perché stiamo supponendo $D = ab_1 - a_1b \neq 0$.

Se $D \neq 0$, la soluzione $\left(\frac{D_x}{D}; \frac{D_y}{D}\right)$ esiste: il sistema è **determinato**.

Se $D = 0$, i casi sono due:

- se $D_x = 0$ e $D_y = 0$, il sistema è **indeterminato**;
- se $D_x \neq 0$ oppure $D_y \neq 0$, il sistema è **impossibile**.

Questo metodo per risolvere un sistema lineare è noto come **metodo di Cramer**.

Gabriel Cramer (1704-1752), matematico svizzero, utilizzò la regola che prende il suo nome verso il 1750.

In sintesi

Se $D \neq 0$, il sistema è determinato e la soluzione è $\left(\frac{D_x}{D}; \frac{D_y}{D}\right)$.

Se $D = 0$, il sistema è:

- impossibile se $D_x \neq 0 \vee D_y \neq 0$;
- indeterminato se $D_x = 0 \wedge D_y = 0$.

ESEMPIO

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} 5x + y = -2 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$$

Calcoliamo il determinante del sistema:

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5(-1) - 1(2) = -5 - 2 = -7.$$

Calcoliamo D_x e D_y:

$$D_x = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-1) - 1(-1) = 2 + 1 = 3;$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1) - (-2)2 = -5 + 4 = -1.$$

La soluzione è:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{3}{-7} = -\frac{3}{7}; \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-1}{-7} = \frac{1}{7}.$$

Il sistema ha come soluzione la coppia $\left(-\frac{3}{7}; \frac{1}{7}\right)$.

7. I sistemi letterali

La discussione di un sistema lineare

Abbiamo anticipato al paragrafo 3 che è possibile stabilire se un sistema, scritto in forma normale, è determinato, indeterminato o impossibile, confrontando i rapporti fra i coefficienti delle incognite e quelli dei termini noti. Diamo ora la dimostrazione delle affermazioni fatte, servendoci del metodo di riduzione.

Cerchiamo la soluzione del sistema nelle incognite x e y:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases} \qquad \text{con } a, a_1, b, b_1, c, c_1 \neq 0.$$

Applichiamo il metodo di riduzione per ricavare x:

$$\begin{cases} ax + by = c \xrightarrow{\cdot b_1} ab_1x + bb_1y = b_1c \\ a_1x + b_1y = c_1 \xrightarrow{\cdot b} a_1bx + bb_1y = bc_1 \end{cases}$$

$$- \begin{cases} ab_1x + bb_1y = b_1c \\ a_1bx + bb_1y = bc_1 \end{cases}$$

$$ab_1x - a_1bx = b_1c - bc_1$$

$$\boldsymbol{x(ab_1 - a_1b) = b_1c - bc_1.}$$

Se applichiamo il metodo di riduzione al sistema iniziale per ricavare y, con calcoli analoghi otteniamo:

$$\boldsymbol{y(ab_1 - a_1b) = ac_1 - a_1c.}$$

- Se $ab_1 - a_1b \neq 0$, il sistema iniziale è **determinato**. Infatti, il sistema è equivalente a quello formato dalle due equazioni ottenute con il metodo di riduzione:

  $$\begin{cases} x(ab_1 - a_1b) = b_1c - bc_1 \\ y(ab_1 - a_1b) = ac_1 - a_1c \end{cases}$$

  dal quale si ricava l'unica soluzione:

  $$x = \frac{b_1c - bc_1}{ab_1 - a_1b}; \qquad y = \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b}.$$

  Poiché $ab_1 - a_1b \neq 0$ equivale a $\dfrac{a}{a_1} \neq \dfrac{b}{b_1}$, il sistema iniziale è determinato se $\dfrac{a}{a_1} \neq \dfrac{b}{b_1}$.

- Se $ab_1 - a_1b = 0$, il sistema iniziale è equivalente al seguente:

  $$\begin{cases} ax + by = c \\ x\,(ab_1 - a_1b) = b_1c - bc_1 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} ax + by = c \\ 0 \cdot x = b_1c - bc_1 \end{cases}$$

  Distinguiamo due casi.

  1. Se $b_1c - bc_1 = 0$, il precedente sistema è **indeterminato**. Infatti la seconda equazione diventa $0 \cdot x = 0$ e il sistema si riduce alla sola equazione $ax + by = c$, che ha infinite soluzioni.

     Poiché $b_1c - bc_1 = 0$ equivale a $\dfrac{b}{b_1} = \dfrac{c}{c_1}$ e poiché $ab_1 - a_1b = 0$ equivale a $\dfrac{a}{a_1} = \dfrac{b}{b_1}$, il sistema iniziale è indeterminato se $\dfrac{a}{a_1} = \dfrac{b}{b_1} = \dfrac{c}{c_1}$.

  2. Se $b_1c - bc_1 \neq 0$, il sistema è **impossibile**, perché, nella seconda equazione, $0 \cdot x$ non può essere uguale all'espressione $b_1c - bc_1$, che è un numero diverso da 0.

     Poiché $b_1c - bc_1 \neq 0$ equivale a $\dfrac{b}{b_1} \neq \dfrac{c}{c_1}$, e $ac_1 - a_1c \neq 0$ equivale a $\dfrac{a}{a_1} \neq \dfrac{c}{c_1}$, tenendo conto che $ab_1 - a_1b = 0$, ossia che $\dfrac{a}{a_1} = \dfrac{b}{b_1}$, il sistema risulta impossibile quando $\dfrac{a}{a_1} = \dfrac{b}{b_1} \neq \dfrac{c}{c_1}$.

La risoluzione di un sistema letterale intero

I sistemi letterali sono sistemi che presentano almeno un'equazione letterale.
Nelle soluzioni di un sistema letterale è necessario discutere per quali valori delle lettere presenti il sistema è determinato, indeterminato o impossibile.

Negli esercizi troverai esempi di sistemi letterali fratti. Un sistema si dice **fratto** se contiene almeno un'equazione fratta.

ESEMPIO

Risolviamo il seguente sistema nelle incognite x e y con il metodo del confronto.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ ax + 2y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ y = \dfrac{1 - ax}{2} \end{cases}$$

Uguagliamo le due espressioni ottenute e scriviamo in forma normale l'equazione in una sola incognita:

$$\begin{cases} y = 2 - x \\ 2 - x = \dfrac{1 - ax}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ 4 - 2x = 1 - ax \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ (a - 2)x = -3 \end{cases}$$

- Se $a - 2 = 0$, cioè se $a = 2$, nella seconda equazione otteniamo $0x = -3$ e quindi il sistema è impossibile.
- Se $a - 2 \neq 0$, cioè se $a \neq 2$, possiamo dividere la seconda equazione per $a - 2$ ottenendo:

$$\begin{cases} y = 2 - x \\ x = -\dfrac{3}{a - 2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2 + \dfrac{3}{a - 2} \\ x = -\dfrac{3}{a - 2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2a - 1}{a - 2} \\ x = -\dfrac{3}{a - 2} \end{cases}$$

In sintesi

- Se $a \neq 2$, il sistema è determinato e la soluzione è $\left(-\dfrac{3}{a - 2}; \dfrac{2a - 1}{a - 2}\right)$.
- Se $a = 2$, il sistema è impossibile.

Negli esercizi risolveremo i sistemi letterali anche con gli altri metodi di risoluzione.

8. I sistemi di tre equazioni in tre incognite

La risoluzione per sostituzione, per confronto, per riduzione

I metodi risolutivi di sostituzione, del confronto e di riduzione possono essere applicati anche a sistemi di primo grado di tre (o più) equazioni in tre (o più) incognite.

Osserviamo che, nel caso di un sistema di tre equazioni nelle tre incognite x, y, z, la soluzione è una **terna** di valori

$$(x; y; z)$$

che risolve contemporaneamente tutte le equazioni del sistema.

ESEMPIO Risolviamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 5 \\ 3x - y + 4z = -3 \\ -x - y + 2z = -5 \end{cases}$$

Applichiamo il metodo di **sostituzione**. Ricaviamo y dalla prima equazione e sostituiamo l'espressione trovata *nelle altre due* equazioni:

$$\begin{cases} y = 5 - 2x + z \\ 3x - (5 - 2x + z) + 4z = -3 \\ -x - (5 - 2x + z) + 2z = -5 \end{cases}$$

La seconda e la terza equazione formano ora un sistema nelle incognite x e z: scriviamo questo sistema in forma normale e lo risolviamo con il metodo di **riduzione**:

$$\begin{cases} y = 5 - 2x + z \\ 5x + 3z = 2 \\ x + z = 0 \end{cases} \xrightarrow{\cdot 3} \ominus \begin{cases} y = 5 - 2x + z \\ 5x + 3z = 2 \\ 3x + 3z = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\overline{2x \qquad = 2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} y = 5 - 2x + z \\ 2x = 2 \\ x + z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 5 - 2x + z \\ x = 1 \\ 1 + z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 5 - 2x + z \\ x = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

Sostituiamo nella prima equazione i valori trovati di x e z e determiniamo il valore di y:

$$\begin{cases} y = 5 - 2 \cdot 1 + (-1) = 2 \\ x = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

La soluzione del sistema è data dalla terna $(1; 2; -1)$.

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V33a

PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI

Bruciare metano

Nel sito: ▶ Scheda di lavoro

Combinando molecole di metano (CH_4) con molecole di ossigeno (O_2), si ottengono, per combustione, molecole di diossido di carbonio (CO_2) e acqua (H_2O) secondo la reazione $CH_4 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$. Che relazione c'è tra le molecole di metano, ossigeno, diossido di carbonio e acqua coinvolte?

FRANCESCO: «Basta leggere lo schema: una molecola di metano e una di ossigeno danno una di diossido di carbonio e una di acqua».

MARIA: «Non direi. Nella reazione ci sono tre elementi, C, H e O, cioè carbonio, idrogeno e ossigeno. Il numero di atomi di ognuno, in una molecola, è in basso a destra. La reazione va bilanciata: gli atomi che ci sono prima e dopo la combustione devono essere gli stessi».

▶ Trova, utilizzando un sistema, quale coefficiente numerico assegnare a ciascuna molecola.

ESPLORAZIONE: PROBLEMI CINESI E SISTEMI

▲ Anziano Han con il copricapo degli antichi mandarini. La dinastia imperiale Han governò dal 206 a.C. al 220 d.C. e diede in seguito il nome alla popolazione di etnia cinese, per differenziarla dalle numerose minoranze presenti in Cina. Oggi la popolazione Han costituisce circa il 90% della popolazione totale della Cina.

GAUSS

La paternità del metodo di riduzione è generalmente attribuita a Karl Friedrich Gauss, matematico tedesco che tra il 1803 e il 1809, per studiare l'orbita di un asteroide, si trovò a risolvere un sistema di sei equazioni lineari in sei incognite. Fu così che formulò le regole generali di quello che, da allora, è noto anche come metodo di eliminazione gaussiana.

CHIU CHANG SUAN SHU

Senza nulla togliere alla genialità del giovane scienziato, le origini della tecnica risolutiva che ha preso il suo nome sono molto anteriori. Vanno infatti rintracciate nella matematica cinese, alcuni secoli prima della nascita di Cristo, al tempo della dinastia Han (202 a.C.). Nel libro *Chiu Chang Suan Shu*, ossia *Nove capitoli sull'arte matematica*, forse la più importante tra le opere matematiche dell'antica Cina, si trovano quasi 250 problemi, alcuni dei quali vengono risolti mediante sistemi di equazioni lineari.

Non vogliamo qui esaminare il metodo utilizzato per la soluzione, ma soltanto presentare esempi di problemi. Consideriamo il seguente, dove il *tou* è l'unità di misura utilizzata.

> «Il rendimento di 2 covoni di grano buono, di 3 covoni di grano medio e di 4 di grano scarso è per ognuno meno di 1 tou.
> Tuttavia, se 1 covone di grano medio viene aggiunto al grano buono, o se 1 covone di grano scarso viene aggiunto al medio, o se 1 covone di grano buono viene aggiunto allo scarso, allora il rendimento di tutti è proprio 1 tou.
> Qual è il rendimento di 1 covone di ogni qualità?»

Oggi noi risolveremmo il problema scegliendo tre incognite x, y, z, relative ai tre rendimenti, e scrivendo il sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3y + z = 1 \\ 4z + x = 1 \end{cases}$$

con le condizioni $2x < 1$, $3y < 1$, $4z < 1$.
La soluzione del sistema è:

$$x = \frac{9}{25}, y = \frac{7}{25}, z = \frac{4}{25}.$$

IN CINQUE SLIDE

Nell'ottavo dei *Nove capitoli* si trova il quesito seguente.

> «Ci sono tre tipi di granturco, di cui tre fasci del primo, due del secondo e uno del terzo fanno 39 misure. Due del primo, tre del secondo e uno del terzo fanno 34 misure e uno del primo, due del secondo e tre del terzo fanno 26 misure. Quante misure di granturco sono contenute in un fascio di ciascun tipo?»

Risolvi il problema con un sistema, utilizzando il metodo che ritieni migliore, e cerca in Internet come il sistema è stato risolto nel *Chiu Chang*. Mostra ai tuoi compagni il tuo lavoro con una presentazione multimediale.

Cerca nel web: sistemi lineari cinesi, Chiu Chang Suan Shu, "make 39 measures", "fanno 39 misure".

Internet

…come scegliere il contratto più conveniente?

Il quesito completo a pag. 703

Molti contratti telefonici hanno questa struttura: l'utente deve pagare un costo fisso c_f e una quota variabile, che dipende dal tempo di connessione t.
Indicata con c_u la quota per unità di tempo, si può esprimere il costo c di un collegamento come: $c = c_f + c_u \cdot t$.

Consideriamo l'offerta di due compagnie, A e B.
A stabilisce una quota fissa (canone) di € 9 mensili, più un centesimo per ogni minuto di connessione; B invece chiede una quota fissa di un euro al mese e 3 centesimi per ogni minuto di connessione. Quindi:

$$c_A = 9 + 0{,}01 \cdot t,$$
$$c_B = 1 + 0{,}03 \cdot t,$$

dove t è il tempo di connessione in un mese, espresso in minuti.

Rappresentiamo le due equazioni come due rette in un piano cartesiano che ha il tempo t in ascissa e il costo c in ordinata.
A seconda del tempo che prevediamo di passare connessi alla rete, converrà scegliere la compagnia A o la B.
Se, per esempio, pensiamo di stare collegati 3 ore in tutto il mese, il prezzo da pagare a ogni società sarà:

$c_A = 9 + 0{,}01 \cdot 3 \cdot 60 =$ € $10{,}80$,
$c_B = 1 + 0{,}03 \cdot 3 \cdot 60 =$ € $6{,}40$.

Per un tempo così breve, B è il contratto più conveniente.
Se però prevediamo di stare connessi 1 ora al giorno, 5 giorni la settimana, e quindi per un totale di 20 ore, i costi saranno:

$c_A = 9 + 0{,}01 \cdot 20 \cdot 60 =$ € 21,
$c_B = 1 + 0{,}03 \cdot 20 \cdot 60 =$ € 37.

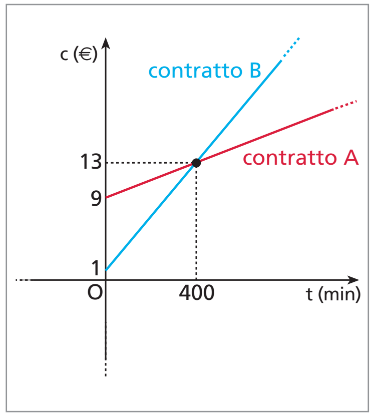
In tal caso, la compagnia più conveniente è la A.

Troviamo l'intersezione delle due rette risolvendo il sistema lineare in c e t:

$$\begin{cases} c = 9 + 0{,}01 \cdot t \\ c = 1 + 0{,}03 \cdot t \end{cases}$$

Esso ha soluzione:

$$\begin{cases} t = 400 \\ c = 13 \end{cases}$$



Al tempo $t = 400$ minuti, equivalente a poco più di 6 ore e mezzo, corrisponde un costo di € 13 per ciascuna delle due compagnie.

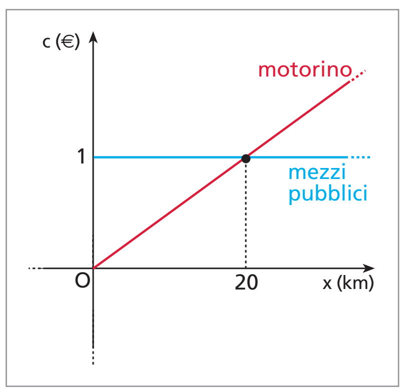
Se pensiamo di stare collegati circa 6 ore e mezzo al mese, i due contratti sono equivalenti e possiamo scegliere indifferentemente l'uno o l'altro. Se prevediamo un tempo di connessione inferiore, sceglieremo il contratto B; viceversa, opteremo per la compagnia A.

VIAGGIARE IN MOTORINO O IN AUTOBUS?

Supponiamo di possedere un motorino e di voler capire se conviene di più, dal punto di vista economico, spostarci con quello o usare i mezzi pubblici. Supponiamo che nella città in cui viviamo si usi il biglietto orario: con € 1 possiamo prendere per un'ora tutti i mezzi pubblici.
Il costo del viaggio in autobus per un'ora è dunque: $c_a = 1$ (in €).
La spesa del viaggio in motorino per un'ora dipende invece dai kilometri x percorsi; se il motorino consuma un litro di benzina ogni 25 kilometri e questa costa € 1,25 al litro, il costo del viaggio è:

$$c_m = \frac{1{,}25}{25}x \rightarrow c_m = 0{,}05x \text{ (in €)}.$$

Risolvendo il sistema $\begin{cases} c = 1 \\ c = 0{,}05x \end{cases}$ **troviamo il punto di intersezione delle rette corrispondenti alle due equazioni, ovvero** $\begin{cases} c = 1 \\ x = 20 \end{cases}$



In conclusione, dal grafico notiamo che, se dobbiamo percorrere meno di 20 kilometri, ci conviene usare il motorino, mentre sarà più economico usare i mezzi pubblici per tragitti più lunghi.

LA TEORIA IN SINTESI
I sistemi lineari

1. I sistemi di due equazioni in due incognite

Un **sistema di equazioni** è un insieme di due o più equazioni nelle stesse incognite. Il sistema è detto **lineare** se formato da equazioni di primo grado.

Il **grado** di un sistema di equazioni algebriche intere è il prodotto dei gradi delle singole equazioni che lo compongono.

La soluzione di un sistema è una soluzione comune a tutte le equazioni che lo compongono.

ESEMPIO

Il sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 6x - y = 8 \end{cases}$$

ha come soluzione la coppia $(1; -2)$, mentre la coppia $(0; 0)$ non è soluzione del sistema perché soddisfa solo la prima equazione.

Prima di applicare qualsiasi metodo risolutivo a un sistema lineare è bene ridurlo a **forma normale**, cioè:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$$

2. Il metodo di sostituzione

Lo schema risolutivo di un sistema lineare di due equazioni in due incognite con il metodo di **sostituzione** è il seguente:

$$\begin{cases} 4x + y = 5 \quad \rightarrow \quad y = 5 - 4x \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 5 - 4x \\ 3x - 2(5 - 4x) = 12 \quad \rightarrow \quad x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 5 - 4 \cdot 2 \\ x = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -3 \\ x = 2 \end{cases}$$

3. I sistemi determinati, impossibili, indeterminati

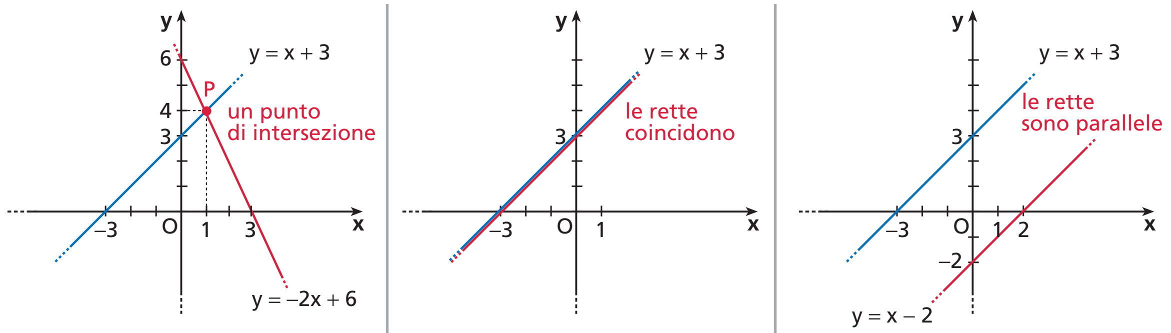
Un sistema è **determinato**, **impossibile** o **indeterminato** a seconda che abbia una, nessuna o infinite soluzioni.

Il sistema lineare $\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$ è

- determinato se $\dfrac{a}{a_1} \neq \dfrac{b}{b_1}$;
- indeterminato se $\dfrac{a}{a_1} = \dfrac{b}{b_1} = \dfrac{c}{c_1}$;
- impossibile se $\dfrac{a}{a_1} = \dfrac{b}{b_1} \neq \dfrac{c}{c_1}$.

Se studiamo il problema in termini geometrici, le equazioni di un sistema lineare di due equazioni in due incognite sono le equazioni di due rette. Se il sistema è:

- **determinato**, le due rette si intersecano in un punto;
- **indeterminato**, le due rette sono coincidenti;
- **impossibile**, le due rette sono parallele.



$$\begin{cases} -x + y = 3 \\ 2x + y = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$$

P (1; 4)

Il sistema è determinato

$$\begin{cases} -x + y = 3 \\ -3x + 3y = 9 \end{cases}$$

Il sistema è indeterminato

$$\begin{cases} -x + y = 3 \\ -x + y = -2 \end{cases}$$

Il sistema è impossibile

4. Il metodo del confronto

Lo schema risolutivo di un sistema lineare di due equazioni in due incognite con il metodo del **confronto** è il seguente:

$$\begin{cases} 4x + y = 5 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}$$

$$y = \frac{3x - 12}{2} \qquad y = 5 - 4x$$

$$\frac{3x - 12}{2} = 5 - 4x$$

$$x = 2$$

$$\begin{cases} y = -3 \\ x = 2 \end{cases}$$

5. Il metodo di riduzione

Lo schema risolutivo di un sistema lineare di due equazioni in due incognite con il metodo di **riduzione** è il seguente:

$$\begin{cases} 4x + y = 5 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}$$

$\cdot 2$ Eliminiamo y

$$\oplus \begin{cases} 8x + 2y = 10 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}$$

$$11x = 22$$

$$x = 2$$

$\cdot 3$ Eliminiamo x $\quad \cdot 4$

$$\ominus \begin{cases} 12x + 3y = 15 \\ 12x - 8y = 48 \end{cases}$$

$$11y = -33$$

$$y = -3$$

$$\begin{cases} y = -3 \\ x = 2 \end{cases}$$

6. Il metodo di Cramer

Per risolvere un sistema lineare di due equazioni in due incognite si può applicare anche il **metodo di Cramer**.

$\begin{cases} 4x + y = 5 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}$ Poiché $D = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = ab_1 - ba_1$, $D = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -8 - 3 = -11$.

$D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 12 & -2 \end{vmatrix} = -10 - 12 = -22$, $D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} = 48 - 15 = 33$.

- se $D \neq 0$, il sistema è **determinato**: $\left(x = \dfrac{D_x}{D}; y = \dfrac{D_y}{D}\right)$;
- se $D = 0$
  - $\to$ $D_x = 0$ e $D_y = 0$, il sistema è **indeterminato**;
  - $\to$ $D_x \neq 0$ o $D_y \neq 0$, il sistema è **impossibile**.

Nel nostro esempio, $D \neq 0$: il sistema è determinato e le soluzioni sono $x = \dfrac{-22}{-11} = 2$ e $y = \dfrac{33}{-11} = -3$.

7. I sistemi letterali

Per risolvere un **sistema letterale** è necessario discutere per quali valori delle lettere il sistema è determinato, indeterminato o impossibile.

8. I sistemi di tre equazioni in tre incognite

Per risolvere un **sistema lineare di tre equazioni in tre incognite** possiamo utilizzare i metodi di sostituzione, confronto e riduzione opportunamente combinati fra loro.

1. I sistemi di due equazioni in due incognite

→ Teoria a pag. 703

RIFLETTI SULLA TEORIA

1 VERO O FALSO?

a) Se un sistema è lineare, allora tutte le equazioni che lo compongono sono di primo grado. V F
b) Le soluzioni di un sistema lineare sono le soluzioni comuni a tutte le equazioni del sistema. V F
c) Le soluzioni di un sistema di due equazioni in due incognite sono rappresentate da coppie di valori reali. V F
d) Se moltiplichi ciascuna equazione di un sistema per 2, tutti i valori della soluzione risulteranno moltiplicati per 2. V F
e) Un sistema di due equazioni in due incognite di 4° grado è sempre composto da due equazioni di 2° grado. V F
f) Due sistemi sono equivalenti quando tutte le soluzioni del primo sistema sono anche soluzioni del secondo sistema. V F
g) Si può sempre definire il grado di un sistema di equazioni algebriche. V F

ESERCIZI

Le equazioni lineari in due incognite

Per ogni equazione nelle incognite x e y verifica se le coppie di numeri scritte a lato sono soluzioni.

2 $2x+6y-5=0$ $(0;1)$, $\left(1;\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{5}{2};0\right)$. [no; sì; sì]

3 $5y+\frac{1}{2}x-1=-4y-\frac{1}{2}x$ $(1;0)$, $\left(2;\frac{1}{9}\right)$, $\left(2;-\frac{1}{9}\right)$. [sì; no; sì]

4 $\frac{y-x}{5}=\frac{x-y}{3}$ $(0;0)$, $(1;2)$, $(-6;-6)$. [sì; no; sì]

Le soluzioni di un sistema

Verifica se la coppia scritta di fianco a ogni sistema è soluzione del sistema oppure no.

5 $\begin{cases}5x-3y=12\\x-2y=1\end{cases}$ $(3;1)$. [sì]

6 $\begin{cases}3x+2y=-1\\6x-9y=2\end{cases}$ $(5;-2)$. [no]

7 $\begin{cases}3y=x+2\\x+5y=6\end{cases}$ $(1;1)$. [sì]

8 $\begin{cases}x+y=2a\\6x+3ay=6a^2\end{cases}$ $(0;2a)$. [sì]

9 La coppia $(1;-2)$ è soluzione di un solo sistema fra i seguenti. Quale?

a) $\begin{cases}\dfrac{y-1}{5}=2x+6\\\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{5}\end{cases}$ b) $\begin{cases}\dfrac{y+2}{6}=x-1\\\dfrac{1}{2}y+1=\dfrac{1-x}{2}\end{cases}$ c) $\begin{cases}\dfrac{4y-3}{8}=\dfrac{1-x}{5}\\\dfrac{8y+2}{3}=-x-1\end{cases}$

ASSOCIA a ogni sistema la relativa coppia soluzione.

10 $\begin{cases}x+3y=-1\\x-y=7\end{cases}$ $\begin{cases}2x-y=2\\x+2y=11\end{cases}$ $\begin{cases}3x+2y=-2\\-5x+y=-1\end{cases}$ $(0;-1)$, $(5;-2)$, $(3;4)$.

11 $\begin{cases}2x-6y=-1\\4x+9y=5\end{cases}$ $\begin{cases}2x-6y=-3\\4x+9y=1\end{cases}$ $\begin{cases}2x-6y=1\\4x+9y=-5\end{cases}$ $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$, $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$.

Il grado di un sistema

12 Fra i seguenti sistemi nelle incognite x e y indica quelli di primo grado.

a) $\begin{cases}2x-y=0\\x^2-2xy=0\end{cases}$ b) $\begin{cases}7x-\dfrac{1}{3}y+1=y\\4a^2x-2=0\end{cases}$ c) $\begin{cases}2ay+2=1-x\\3x+y=1-2y\end{cases}$

Indica il grado di ciascuno dei seguenti sistemi.

13 a) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} = y + 2 \\ 4x - 3y = 2y + 2 - 5x \end{cases}$ b) $\begin{cases} xy = -7 \\ x = -y^2 + 9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^3 - 3x^2y^2 = 0 \\ x^2y - 2 + 3xy = y \end{cases}$

14 a) $\begin{cases} y = 4x^2 - 2x + 1 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 4xy - 8 \\ 2x - 3y + 1 = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x - 6y + z = 2 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$

15 **COMPLETA** i seguenti sistemi scrivendo un'equazione nelle incognite x e y in modo che il sistema formato dalle due equazioni abbia il grado indicato a fianco.

a) $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$ secondo grado b) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$ primo grado

La riduzione di un sistema lineare a forma normale

ESERCIZIO GUIDA

16 Riduciamo a forma normale il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x - 5 = 7y \\ 4(y - 2x) + 10x - 3 = -2 \end{cases}$$

Dobbiamo scrivere le due equazioni nella forma $ax + by = c$, in cui compaiono le due incognite a primo membro e il termine noto a secondo membro.
Eseguiamo i calcoli:

$$\begin{cases} 2x - 7y = 5 \\ 4y - 8x + 10x = 3 - 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - 7y = 5 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases}$$

Fra i seguenti sistemi lineari, indica quelli scritti in forma normale e riduci poi gli altri alla stessa forma.

17 a) $\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ x = y + 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ 6x - y = -1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 8x + 3y = 6 \\ -2x + 7y = -2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = -y + 3 \\ y = 1 - 2x \end{cases}$

18 a) $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + 3y - 1 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6x - y = 4 \\ 8y + 7x = -5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x = y + 1 \\ 3x = -2y + 6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = 2x - 2 \\ 1 = 4x + 2y \end{cases}$

Riduci a forma normale i seguenti sistemi lineari.

19 $\begin{cases} 2x - 3y - 14 = 9 - 3x + y \\ x + 4y - 10 = +14 + 1 - 3x - 6y \end{cases}$

20 $\begin{cases} 9(x + y) - 8(x - y) = 19 \\ 4(x - y) + 2(3x - y) = 14 \end{cases}$

21 $\begin{cases} 5(x - y) - 9 = 30 - x \\ 4x - 3y = 54 - 3x \end{cases}$

22 $\begin{cases} y - \dfrac{1}{10} + x = \dfrac{1 + x}{2} - \dfrac{1}{20} \\ 2x - y + \dfrac{3}{20} = 1 + x - \dfrac{1 + 2y}{3} \end{cases}$

2. Il metodo di sostituzione

Teoria a pag. 705

RIFLETTI SULLA TEORIA

23 VERO O FALSO?

a) Nel metodo di sostituzione si ricava sempre l'incognita x dalla prima equazione. V F

b) Il metodo di sostituzione non si può applicare se i termini noti delle equazioni del sistema lineare sono nulli. V F

c) Dato un sistema di due equazioni in due incognite, nel metodo di sostituzione si deve sostituire l'espressione ricavata, per una delle due incognite, da una delle due equazioni nell'altra equazione, al posto della stessa incognita. V F

24 TEST Sono dati i sistemi:

a) $\begin{cases} y = \dfrac{2x+1}{5} \\ 3x - 7\left(\dfrac{2x+1}{5}\right) = 5 \end{cases}$, b) $\begin{cases} 2x - 5(3x-5) = -1 \\ y = 3x - 5 \end{cases}$,

c) $\begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ 3x - 7y = 5 \end{cases}$

A a) e b) sono equivalenti al sistema c).

B solo a) è equivalente al sistema c).

C solo b) è equivalente al sistema c).

D a) e b) sono equivalenti fra loro.

E non si può stabilire se a) o b) siano equivalenti al sistema c).

25 TEST È dato il seguente sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 5x + y = -1 \end{cases}$$

Se lo si vuole risolvere con il metodo di sostituzione, risulta più semplice, dal punto di vista del calcolo:

A ricavare l'incognita x dalla prima equazione.

B ricavare l'incognita x dalla seconda equazione.

C ricavare l'incognita y dalla prima equazione.

D ricavare l'incognita y dalla seconda equazione.

E trasportare i termini noti a sinistra dell'uguale.

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

26 Risolviamo il seguente sistema con il metodo di sostituzione:

$$\begin{cases} 2y - 5 = -2x - 6 + y \\ 2(x-1) = 3(1-2y) + 19 \end{cases}$$

Riduciamo il sistema a forma normale:

$$\begin{cases} 2x + 2y - y = -6 + 5 \\ 2x - 2 = 3 - 6y + 19 \end{cases} \to \begin{cases} 2x + y = -1 \\ 2x + 6y = 22 + 2 \end{cases} \to \begin{cases} 2x + y = -1 \\ 2x + 6y = 24 \end{cases} \to \begin{cases} 2x + y = -1 \\ x + 3y = 12 \end{cases}$$

Ricaviamo y dalla prima equazione, perché ha il coefficiente uguale a 1, quindi il calcolo è più semplice:

$$\begin{cases} y = -1 - 2x \\ x + 3y = 12 \end{cases}$$

Sostituiamo l'espressione a y nella seconda equazione:

$$\begin{cases} y = -1 - 2x \\ x + 3(-1 - 2x) = 12 \end{cases}$$

Risolviamo la seconda equazione:

$$\begin{cases} y = -1 - 2x \\ x - 3 - 6x = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -1 - 2x \\ -5x = 15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -1 - 2x \\ x = -3 \end{cases}$$

Sostituiamo il valore di x nella prima equazione:

$$\begin{cases} y = -1 - 2(-3) \\ x = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = -3 \end{cases}$$

La soluzione del sistema è $(-3; 5)$.

Risolvi con il metodo di sostituzione i seguenti sistemi.

27 $\begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 9 \end{cases}$ $[(6; 3)]$

28 $\begin{cases} 2x - 5y = 7 \\ x - 3y = 1 \end{cases}$ $[(16; 5)]$

29 $\begin{cases} 5x + y = 20 \\ 5x + 7y = 20 \end{cases}$ $[(4; 0)]$

30 $\begin{cases} x - 6y + 5 = 3 - 7y + 10 + 2x + 2 \\ x + y = 6 - 8 \end{cases}$ $[(-6; 4)]$

31 $\begin{cases} 2x - 4 = 3y \\ 4y - 1 = 2x \end{cases}$ $\left[\left(\frac{19}{2}; 5\right)\right]$

32 $\begin{cases} 3x - 1 = 0 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)\right]$

33 $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 4x + 3y = 4 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{5}{2}; -2\right)\right]$

34 $\begin{cases} 5(5x - 2) = 20x - 2(y - 3) \\ 2(x - 5) - 12y = 21(1 - y) \end{cases}$ $[(2; 3)]$

35 $\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 1)(y + 1) = x^2 + y^2 + 3 \\ (x - 3y)(x + 3y) - x^2 + 3y = 4 - 9y^2 - 2x \end{cases}$ $\left[\left(0; \frac{4}{3}\right)\right]$

36 $\begin{cases} 3(x - 1) + 2(y + 1) - 6 = 5 \\ 2(x + 1) - 3(y - 1) = 0 \end{cases}$ $[(2; 3)]$

37 $\begin{cases} 8(x - y) + 6(x + y) - 96 = 144 \\ x + y = 40 \end{cases}$ $[(20; 20)]$

38 $\begin{cases} x - 2 = \dfrac{y}{3} - 1 + \dfrac{x}{2} \\ \dfrac{5x + 3y}{6} - 3 = \dfrac{2x - y}{4} + \dfrac{7}{12} \end{cases}$ $[(4; 3)]$

39 $\begin{cases} 3(x - 1) - 2(y - 1)^2 = 5 - 2y^2 \\ 6x(y - 1) + 3y(4 - 2x) = 0 \end{cases}$ $[(2; 1)]$

40 $\begin{cases} (x + 2)^2 - 3x + 2y = 9 + x^2 \\ -5x + 3(x - 3) + x - y = -6 \end{cases}$ $[(-11; 8)]$

41 $\begin{cases} \dfrac{x - 2}{5} - \dfrac{2y - 1}{3} = \dfrac{x + y}{15} \\ \dfrac{1}{3}x - 2y = 1 \end{cases}$ $[(-27; -5)]$

BRAVI SI DIVENTA ▶ E30

42 $\begin{cases} \dfrac{3}{2}(x + 1) + 4(x - y) = 3x + \dfrac{1}{3} \\ x(1 - x) + (y - 2)^2 = \dfrac{7}{3} + (y - x)(x + y) \end{cases}$

43 $\begin{cases} (y-x)[1+(y+x)]+(x+1)^2-6=-(x^2-y^2)+(x-2)(x+2) \\ 2(2x+3y)-3(x-5y)=1 \end{cases}$ $[(1;0)]$

44 $\begin{cases} x-(x-1)(1+y)=y+2+1-x-x(1+y) \\ y(1+x^2)+3x+x^2=x^2y+(1+x)^2+4y-13 \end{cases}$ $\left[\left(1;\frac{13}{3}\right)\right]$

45 $\begin{cases} \frac{1}{2}(x-3)-\frac{y-2x}{2}=x-1 \\ 2(x-y)-\frac{1}{3}\left(x-\frac{y}{2}\right)+\frac{17}{6}=\frac{15-x}{3}-\frac{1}{6}(1-y) \end{cases}$ [indeterminato]

46 $\begin{cases} \frac{1}{3}(y+1)+y-3=\frac{1}{2}(x+1)-\frac{1}{3}(x-y) \\ \frac{y-3-x}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}(x+1) \end{cases}$ $[(-1;3)]$

3. I sistemi determinati, impossibili, indeterminati

Teoria a pag. 706

RIFLETTI SULLA TEORIA

47 **VERO O FALSO?**

a) Se un sistema è impossibile, allora non ha soluzioni. V F
b) Un sistema è determinato quando ha una sola soluzione. V F
c) Un sistema è impossibile solo quando tutte le equazioni del sistema sono impossibili. V F
d) Il sistema $\begin{cases} \frac{1}{5}y=-2 \\ \frac{1}{3}x=-1 \end{cases}$ è indeterminato. V F
e) Il sistema $\begin{cases} 3x-2y=5 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$ individua due rette coincidenti. V F
f) Se in $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a_1x+b_1y+c_1=0 \end{cases}$ si ha $\frac{a}{b}\neq\frac{a_1}{b_1}$, allora il sistema è determinato. V F
g) I sistemi $\begin{cases} 2x-y=-2 \\ 6x-3y=4 \end{cases}$ e $\begin{cases} 2x-y=2 \\ 6x-3y=6 \end{cases}$ sono rispettivamente impossibile e indeterminato. V F
h) Se nel sistema $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a_1x+b_1y+c_1=0 \end{cases}$ si ha $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}\neq\frac{c}{c_1}$, allora il sistema è impossibile. V F
i) Un sistema lineare indeterminato è rappresentato graficamente da due rette parallele. V F

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

48 Stabiliamo se ognuno dei seguenti sistemi è determinato, indeterminato o impossibile senza risolverlo. Interpretiamo poi graficamente i sistemi.

a) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 2y = -2 \\ -3x + 6y = -12 \end{cases}$

I tre sistemi sono scritti in forma normale, quindi confrontiamo in ognuno di essi i rapporti $\frac{a}{a_1}$ fra i coefficienti di x, $\frac{b}{b_1}$ fra i coefficienti di y e $\frac{c}{c_1}$ fra i termini noti.

a) $\begin{cases} 1x + 2y = 4 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases}$ $\qquad \frac{a}{a_1} = \frac{1}{3}; \quad \frac{b}{b_1} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}.$

I rapporti tra i coefficienti di x e y sono diversi, quindi il sistema è determinato.

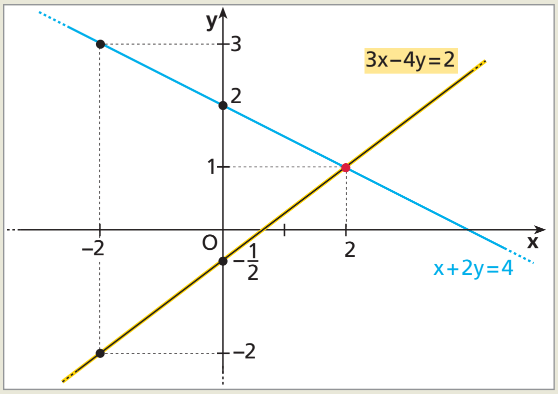
Le equazioni $x + 2y = 4$ e $3x - 4y = 2$ sono rappresentate nel piano cartesiano da due rette. Troviamo alcuni punti mediante tabelle e disegniamo le rette.

$x + 2y = 4$

x	-2	0	2
y	3	2	1

$3x - 4y = 2$

x	-2	0	2
y	-2	$-\frac{1}{2}$	1



b) $\begin{cases} 2x - 1y = 1 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$ $\qquad \frac{a}{a_1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; \quad \frac{b}{b_1} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}; \quad \frac{c}{c_1} = \frac{1}{2}.$

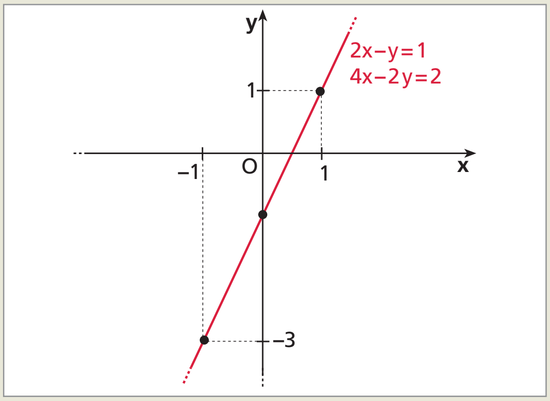
I tre rapporti sono uguali, quindi il sistema è indeterminato.
Rappresentiamo graficamente il sistema.

$2x - y = 1$

x	-1	0	1
y	-3	-1	1

$4x - 2y = 2$

x	-1	0	1
y	-3	-1	1



c) $\begin{cases} 1x - 2y = -2 \\ -3x + 6y = -12 \end{cases}$ $\quad \dfrac{a}{a_1} = \dfrac{1}{-3} = -\dfrac{1}{3}; \quad \dfrac{b}{b_1} = \dfrac{-2}{6} = -\dfrac{1}{3}; \quad \dfrac{c}{c_1} = \dfrac{-2}{-12} = \dfrac{1}{6}.$

$\dfrac{a}{a_1} = \dfrac{b}{b_1} \neq \dfrac{c}{c_1}$, quindi il sistema è impossibile.

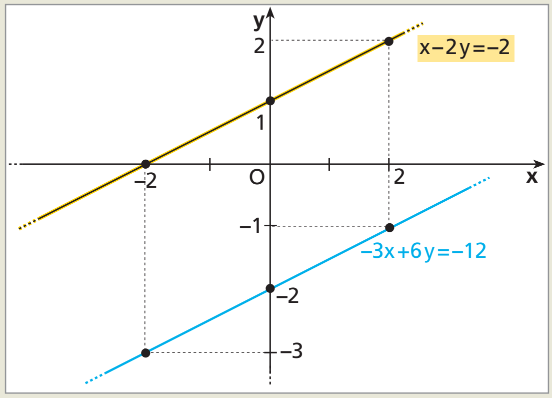
Interpretiamolo graficamente.

$x - 2y = -2$

x	-2	0	2
y	0	1	2

$-3x + 6y = -12$

x	-2	0	2
y	-3	-2	-1



Per ogni sistema stabilisci se esso è determinato, impossibile o indeterminato, senza risolverlo. Se il sistema è determinato, risolvilo con il metodo di sostituzione. Interpreta poi graficamente il sistema.

49 $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 6x + 4y = 14 \end{cases}$ [indeterminato]

50 $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$ $\left[\text{determinato}, \left(\dfrac{1}{7}; \dfrac{2}{7}\right)\right]$

51 $\begin{cases} 6x - 2y = 5 \\ 18x - 6y = -1 \end{cases}$ [impossibile]

52 $\begin{cases} 4x - 2y = 1 \\ -2x + y = -2 \end{cases}$ [impossibile]

53 $\begin{cases} y - 3x = 1 \\ x - \dfrac{1}{3}y = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$ [indeterminato]

54 $\begin{cases} 2x + \dfrac{1}{6}y - 3 = 0 \\ \dfrac{1}{2}y - \dfrac{1}{2}x = 1 \end{cases}$ $\left[\text{determinato}, \left(\dfrac{16}{13}; \dfrac{42}{13}\right)\right]$

55 $\begin{cases} 1 - 4y - \dfrac{1}{3}x = 0 \\ \dfrac{2}{3}x + 8y = +\dfrac{1}{2} \end{cases}$ [impossibile]

56 Sono date le seguenti equazioni:

a) $2x - 3y + 1 = 0$;

b) $2x + 2y = 0$;

c) $-2x + 3y + 2 = 0$;

d) $4x - 6y + 2 = 0$.

Puoi costruire con due di esse un sistema impossibile? E un sistema indeterminato?

[impossibile con a) e c), c) e d); indeterminato con a) e d)]

Determina per quali valori di k i seguenti sistemi sono determinati, senza risolverli.

57 $\begin{cases} kx - y = 1 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$ $\left[k \neq -\frac{2}{3}\right]$

58 $\begin{cases} (k+1)x - 2ky = k \\ 4x + 2y = 1 \end{cases}$ $\left[k \neq -\frac{1}{5}\right]$

59 $\begin{cases} x - 3y = k \\ 2x + y = 2 \end{cases}$ $[\forall\, k \in \mathbb{R}]$

60 $\begin{cases} 2kx + ky = 5 \\ (k+1)x + \left(\frac{k+1}{2}\right)y = -4 \end{cases}$ $[\nexists\, k \in \mathbb{R}]$

Trova per quali valori di k i seguenti sistemi sono impossibili, senza risolverli.

61 $\begin{cases} x + 2ky = 2 \\ -2x + y = 1 \end{cases}$ $\left[k = -\frac{1}{4}\right]$

62 $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 6kx + 4y = 1 \end{cases}$ $[k = -2]$

63 $\begin{cases} kx - (k+3)y = 1 \\ 2x - 8y = 3 \end{cases}$ $[k = 1]$

64 $\begin{cases} 11x - 3y = k + 1 \\ 22x - 6y = -k \end{cases}$ $\left[k \neq -\frac{2}{3}\right]$

Trova per quali valori di a i seguenti sistemi sono indeterminati.

65 $\begin{cases} 2ax + y = -2 \\ x - 2y = +4 \end{cases}$ $\left[a = -\frac{1}{4}\right]$

66 $\begin{cases} -x + y = 2 \\ 2ax - 4y = 3 \end{cases}$ $[\nexists\, a \in \mathbb{R}]$

67 $\begin{cases} ax + ay = -3 \\ 3ax + 3y = -9 \end{cases}$ $[a = 1]$

68 $\begin{cases} -2ax + y = 5a \\ 6x - y = -15 \end{cases}$ $[a = 3]$

Sistemi e geometria analitica

COMPLETA scrivendo a fianco di ogni sistema se le rette rappresentate dalle due equazioni sono coincidenti, parallele o incidenti, *senza* risolvere il sistema.

69 $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 6y = 6 \end{cases}$

70 $\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x + \frac{1}{2}y - 1 = 0 \end{cases}$

71 $\begin{cases} x - 3y - 1 = 0 \\ 4x - 12y = 4 \end{cases}$

72 $\begin{cases} x = 5y + 1 \\ -2x + 10y - 4 = 0 \end{cases}$

73 $\begin{cases} 3x - 2y - 1 = 0 \\ 6x - 4y - 2 = 0 \end{cases}$

74 $\begin{cases} 3x + 4y - 2 = 0 \\ \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3} = 0 \end{cases}$

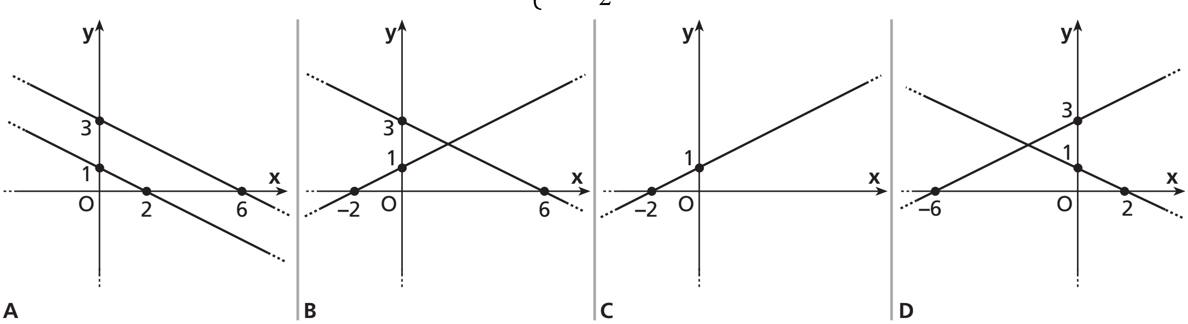
75 **ASSOCIA** a ogni sistema di equazioni il grafico che lo rappresenta.

1. $\begin{cases} 6 = 6y - 3x \\ x = 2y - 2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2y = x + 2 \\ x = 6 - 2y \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2y + x = 2 \\ y = \frac{1}{2}x + 3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = 2 - 2y \\ 2y = 6 - x \end{cases}$



Determina le coordinate degli eventuali punti di intersezione delle rette che hanno le seguenti equazioni.

76 $3x - y + 7 = 0$; $2x + y + 3 = 0$. $[(-2; 1)]$

77 $y = 4x - 7$; $x + y + 2 = 0$. $[(1; -3)]$

78 $2x - y + 1 = 0$; $y = 2x - 3$. [nessun punto]

79 $3x - y + 9 = 0$; $y = 2x + 6$. $[(-3; 0)]$

80 $y = 3x + 1$; $2y - 8 = 0$. $[(1; 4)]$

81 $2x - 3y - 2 = 0$; $6x - 9y - 6 = 0$. [tutti i punti]

82 $2x + y + 4 = 0$; $2y + 5 + x = 0$. $[(-1; -2)]$

83 $2x - 6y - 12 = 0$; $y = \frac{1}{3}x - 2$. [tutti i punti]

84 $y = \frac{3}{2}x - 1$; $4x + 3y - 2 = 0$. $\left[\left(\frac{10}{17}; -\frac{2}{17}\right)\right]$

85 $y = 3x - 2$; $3x - y - 1 = 0$. [nessun punto]

86 Trova le coordinate dei vertici del triangolo individuato dalle rette di equazioni $x - 3y - 13 = 0$, $4x - y - 8 = 0$, $3x + 2y - 17 = 0$ e calcolane l'area. $[(3; 4), (1; -4), (7; -2); \text{area} = 22]$

87 Trova perimetro e area del triangolo individuato dalle rette di equazione $y + 2 = 0$, $3x - 4y + - 11 = 0$, $3x + 4y - 19 = 0$, verificando che è un triangolo isoscele. [perimetro = 18; area = 12]

88 Scrivi l'equazione della retta r passante per $P(0; 4)$ e parallela alla retta $2x - y + 1 = 0$, e calcola l'area del quadrilatero limitato dalle due rette e dagli assi cartesiani. $\left[2x - y + 4 = 0; \text{area} = \frac{15}{4}\right]$

89 Date le rette $y - x = 0$, $x + y - 3 = 0$, $x - 4y - 3 = 0$, verifica che esse determinano un triangolo rettangolo. Calcola poi l'area del triangolo e le coordinate del circocentro D. $\left[\text{area} = \frac{15}{4}; D\left(1; -\frac{1}{2}\right)\right]$

90 Determina per quale valore di k le rette $(k + 1)x + + y - 4 = 0$ e $kx + (k - 1)y + 2 = 0$ si intersecano sull'asse delle ordinate. $\left[k = \frac{1}{2}\right]$

91 Determina per quale valore di k le rette $(k - 2)x + + ky - 1 = 0$ e $2x - ky + 2 = 0$ si incontrano sull'asse delle ascisse. $[k = 1]$

92 Di un parallelogramma $ABCD$ sono noti l'equazione del lato AB, $y = -3x + 6$, il vertice $C(-1; 1)$, l'ascissa -4 del vertice D e l'ascissa -6 del vertice A.
Determina le coordinate mancanti dei vertici A, B, D. $[A(-6; 24); B(-3; 15); D(-4; 10)]$

93 Sono dati i punti $A(-1; 3)$ e $B(3; 1)$, e M è il loro punto medio.
a) Determina l'equazione dell'asse del segmento AB e verifica che tale retta passa per l'origine degli assi.
b) Conduci da B la retta r parallela a OM e da O la retta s parallela ad AB, e trova le loro equazioni.
c) Detto D il punto di intersezione di r e s, stabilisci la natura del quadrilatero $ABDO$ e calcolane l'area.
$\left[\text{a) } y = 2x; \text{ b) } r: y = 2x - 5, s: y = -\frac{1}{2}x; \text{ c) } D(2; -1); \text{area} = \frac{15}{2}\right]$

4. Il metodo del confronto

Teoria a pag. 711

RIFLETTI SULLA TEORIA

94 VERO O FALSO?

a) Per risolvere un sistema con il metodo del confronto si ricava la stessa incognita da tutte le equazioni. V F

b) Si può applicare il metodo del confronto solo quando le incognite hanno coefficiente unitario. V F

c) Quando si applica il metodo del confronto è sempre indifferente ricavare l'incognita x o la y. V F

d) Un sistema lineare con a, a_1, b, $b_1 \neq 0$ può sempre essere risolto con il metodo del confronto. V F

95 TEST Il sistema

$$\begin{cases} y = \dfrac{3-2x}{4} \\ y = \dfrac{5x-9}{7} \end{cases}$$

è stato ottenuto da uno solo dei seguenti sistemi. Quale?

A $\begin{cases} 2x + 4y + 3 = 0 \\ 5x - 7y + 9 = 0 \end{cases}$

B $\begin{cases} 2x + 4y + 3 = 0 \\ 5x - 7y - 9 = 0 \end{cases}$

C $\begin{cases} 2x + 4y - 3 = 0 \\ 5x - 7y - 9 = 0 \end{cases}$

D $\begin{cases} 2x - 4y + 3 = 0 \\ 5x + 7y - 9 = 0 \end{cases}$

E $\begin{cases} 2x + 4y + 3 = 0 \\ 5x + 7y + 9 = 0 \end{cases}$

96 Esistono casi in cui il metodo del confronto è di immediata applicazione? Quali?

97 Puoi affermare che il metodo del confronto è un caso particolare del metodo di sostituzione? Perché?

98 Sono dati i sistemi:

$$\begin{cases} 3x + 13y - 4 = 0 \\ 3x - 12y + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y = 4x - 12 \\ 8x - 3y + 15 = 0 \end{cases}$$

In quale dei due pensi sia più opportuno procedere con il metodo del confronto? Perché?

99 Quando risolvi un sistema con il metodo del confronto, puoi uguagliare fra loro le espressioni che si ottengono ricavando la stessa incognita da entrambe le equazioni. Perché?

ESERCIZI

Nel sito: ▶ 14 esercizi di recupero

ESERCIZIO GUIDA

100 Risolviamo con il metodo del confronto il seguente sistema, dopo aver stabilito se è determinato, impossibile o indeterminato:

$$\begin{cases} 3y - 2x + 1 = 0 \\ 3(x+1) + 11 = 2(5-6y) \end{cases}$$

Riduciamo il sistema a forma normale:

$$\begin{cases} -2x + 3y = -1 \\ 3x + 3 + 11 = 10 - 12y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x + 3y = -1 \\ 3x + 12y = -4 \end{cases}$$

Poiché $\dfrac{-2}{3} \neq \dfrac{3}{12}$, il sistema è determinato.

Poiché nessuno dei coefficienti di x o y è uguale a 1, è indifferente ricavare da entrambe le equazioni una variabile o l'altra. Ricaviamo y:

$$\begin{cases} 3y = -1 + 2x \\ 12y = -4 - 3x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{y = \dfrac{2x-1}{3}} \\ \mathbf{y = \dfrac{-3x-4}{12}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2x-1}{3} \\ \mathbf{\dfrac{2x-1}{3} = \dfrac{-3x-4}{12}} \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2x-1}{3} \\ \mathbf{4(2x-1) = -3x-4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2x-1}{3} \\ \mathbf{8x-4 = -3x-4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2x-1}{3} \\ \mathbf{11x = 0} \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \mathbf{y = \dfrac{2 \cdot 0 - 1}{3}} \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{1}{3} \\ x = 0 \end{cases}$$

La soluzione del sistema è $\left(0; -\dfrac{1}{3}\right)$.

Risolvi con il metodo del confronto i seguenti sistemi, dopo aver stabilito se ognuno di essi è determinato, impossibile o indeterminato.

101 $\begin{cases} 3x - y = -1 \\ x + y = 5 \end{cases}$ $[(1; 4)]$

102 $\begin{cases} x + 4y = 4 \\ y = +\dfrac{1}{2}(x-1) \end{cases}$ $\left[\left(2; \dfrac{1}{2}\right)\right]$

103 $\begin{cases} 6x = 1 - 2y \\ 5x + y = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$ $\left[\left(-1; \dfrac{7}{2}\right)\right]$

104 $\begin{cases} \dfrac{1}{3}x + 4y = 5 \\ -x + \dfrac{1}{2}y = -\dfrac{5}{2} \end{cases}$ $[(3; 1)]$

105 $\begin{cases} -3x + 6y = 4 \\ 3x = 6y - 4 \end{cases}$ [indeterminato]

106 $\begin{cases} (2x-1)(y+3) + 5y + 1 = 2x(y+4) + x \\ 12x + 17 = 7y \end{cases}$ $[(-2; -1)]$

107 $\begin{cases} 3y + 24 + (y-2)^2 + 4y = 4x + y^2 + 4 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$ $[(3; -4)]$

108 $\begin{cases} 3x + 2(y-4)^2 = 36 + 2y^2 - 15y + 2x \\ 3(y-1) + 2[x - (x-1)^2] = -2 - 2x(x-2) \end{cases}$ $[(3; -1)]$

109 $\begin{cases} 5(x-y)[1 + (x+y)] + 5y^2 = 5x^2 - 6 \\ 5(y-x) = 1 \end{cases}$ [impossibile]

110 $\begin{cases} 2(8-2x) - y - (y+1)^2 = 3(y-x) - y^2 - 1 \\ -24 + 4(4-y) = x - 24 + 2y \end{cases}$ [indeterminato]

111 $\begin{cases} -5x - 4[x - y + (y-2)(y+2)] = -4y^2 + 11 \\ 3(3x - 2y - 2) + x^2 - 3 = (x-3)(x+3) + 6 \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{1}{3}; -\dfrac{1}{2}\right)\right]$

112 $\begin{cases} 2(x-y) + x + (x+2)^2 = x(x-1) + x + 4 \\ 3(y - 7x) = (y+x)^2 - y - 13 - (x-y)^2 - 4xy \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{13}{7}; \dfrac{13}{2}\right)\right]$

113 $\begin{cases} (x-2y)^2 - (x-y)^2 - y(3y-2x) = x + y - 2 \\ \dfrac{2x-y}{3} - \dfrac{x+2y}{6} - \dfrac{x-y}{2} = 0 \end{cases}$ $[(2; 0)]$

5. Il metodo di riduzione

Teoria a pag. 712

RIFLETTI SULLA TEORIA

114 TEST Nel sistema $\begin{cases} 2x - 5y = 3 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$

i fattori per cui moltiplicare le due equazioni, affinché i coefficienti della y siano opposti, sono:

A 10 per entrambe le equazioni.

B 2 per la prima equazione e 5 per la seconda.

C 6 per entrambe le equazioni.

D -5 per la prima equazione e 10 per la seconda.

E 2 per la prima equazione e -5 per la seconda.

115 Se si applica il metodo di riduzione al sistema

$$\begin{cases} x - 3y + 4 = 0 \\ 2x + 3y - 7 = 0 \end{cases}$$

quale sistema equivalente si ottiene?

116 TEST Se applichi il primo passaggio del metodo di riduzione a uno dei seguenti sistemi, ottieni il sistema equivalente: $\begin{cases} 12x + 9y = -3 \\ -12x + 16y = 8 \end{cases}$

Qual è il sistema di partenza?

A $\begin{cases} -4x + 3y = -1 \\ -3x + 4y = 2 \end{cases}$

B $\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ -3x + 4y = 2 \end{cases}$

C $\begin{cases} 4x - 3y = 1 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases}$

D $\begin{cases} 4x + 3y = -1 \\ -3x - 4y = 2 \end{cases}$

E $\begin{cases} 4x + 3y = -1 \\ -3x + 4y = 2 \end{cases}$

117 È dato il sistema $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$

Scrivi l'equazione che si ottiene addizionando le due equazioni. La coppia soluzione del sistema verifica anche tale equazione. Perché?

ESERCIZI

Nel sito: ▶ 8 esercizi di recupero

ESERCIZIO GUIDA

118 Risolviamo i seguenti sistemi, già ridotti in forma normale, con il metodo di riduzione:

a) $\begin{cases} -2x + 3y = 1 \\ 4x - 5y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 5x + 2y = 3 \end{cases}$

a) Poiché $\frac{-2}{4} \neq \frac{3}{-5}$, il sistema è determinato.

Eliminiamo x, moltiplicando i termini della prima equazione per 2 e sommando membro a membro:

$$\begin{array}{l} \cdot 2 \\ + \\ \\ \end{array} \begin{cases} -4x + 6y = 2 \\ +4x - 5y = -1 \end{cases}$$
$$y = 1$$

Sostituendo $y = 1$ in una delle due equazioni, per esempio la prima, si ha:

$-2x + 3 \cdot 1 = 1 \rightarrow -2x = 1 - 3 \rightarrow$
$\rightarrow -2x = -2 \rightarrow x = 1.$

Il sistema ha come soluzione la coppia $(1; 1)$.

b) Poiché $\frac{2}{5} \neq \frac{-3}{2}$, il sistema è determinato.

Eliminiamo y moltiplicando i termini della prima equazione per 2 e quelli della seconda per 3 e sommando membro a membro:

$$\begin{array}{l} \cdot 2 \\ + \\ \cdot 3 \end{array} \begin{cases} 4x - 6y = 10 \\ 15x + 6y = 9 \end{cases}$$
$$19x = 19$$
$$x = 1$$

Sostituiamo $x = 1$ nella seconda equazione:
$5 + 2y = 3 \rightarrow 2y = -2 \rightarrow y = -1.$

La soluzione del sistema è $(1; -1)$.

Risolvi i seguenti sistemi con il metodo di riduzione, dopo aver stabilito, per ciascuno, se è determinato, indeterminato o impossibile.

119 $\begin{cases} x - y = 4 \\ x + 3y = 8 \end{cases}$ $[(5; 1)]$

120 $\begin{cases} 3x + 7y = 2 \\ 4x - 2y = -3 \end{cases}$ $\left[\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)\right]$

121 $\begin{cases} y = 6 - 3x \\ y - 2x = -4 \end{cases}$ $[(2; 0)]$

122 $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 7x - y = 1 \end{cases}$ $\left[\left(-\frac{2}{5}; -\frac{19}{5}\right)\right]$

123 $\begin{cases} x = 4y + 1 \\ 4x - 16y = 3 \end{cases}$ [impossibile]

124 $\begin{cases} 3x - 4 = 5y \\ 2y + x = 1 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{13}{11}; -\frac{1}{11}\right)\right]$

125 $\begin{cases} x - \frac{y}{2} = \frac{5}{3} \\ \frac{3}{2}x - \frac{3}{8}y = 1 \end{cases}$ $\left[\left(-\frac{1}{3}; -4\right)\right]$

126 $\begin{cases} 3x - 8y = -12 \\ \frac{1}{2}x + 4y = -3 \end{cases}$ $\left[\left(-\frac{9}{2}; -\frac{3}{16}\right)\right]$

127 $\begin{cases} (x + 2)^2 - 1 = x^2 - 5y \\ 4x - 1 = -y \end{cases}$ $\left[\left(\frac{1}{2}; -1\right)\right]$

---

128 $\begin{cases} x(x + y) - 3 = x + x^2 + xy - 2y \\ 3(x - y) + 2 = 0 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{5}{3}; \frac{7}{3}\right)\right]$

129 $\begin{cases} 10(x - 1) + 7y - (x + 1)(x - 1) = x(1 - x) + 1 \\ 6x + 7y = 9 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{1}{3}; 1\right)\right]$

130 $\begin{cases} 1 + 3(2x - 2)(1 + x) - 6x^2 + 3 = 2y - 6x + 4 \\ x - 3y + 2 = 0 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{11}{8}; \frac{9}{8}\right)\right]$

131 $\begin{cases} 6 + (2x - 1)(1 + y) + 2y - 1 = y(2x - 1) \\ 16(x - 1) + 12(y + 1) + 24[(x + y) - 1] = 8(2y - 1) \end{cases}$ $[(3; -5)]$

BRAVI SI DIVENTA ► E31

132 $\begin{cases} \frac{x - 5}{3} + \frac{3}{5}y = x + 1 - \frac{2}{5}y \\ (y + 1)^2 - 6x + y(x + 1) = 10 + y(y + x + 1) - x \end{cases}$

133 $\begin{cases} 2(x - y) = 2 - x \\ 2(x + y)^2 + x + (x + y - 1) = 2x + 2(x^2 + y^2 + 2xy) + y + 1 \end{cases}$ [impossibile]

134 $\begin{cases} 2(3x - 2y) - 4x = 2(x - 6y) \\ 1 - 2y^2(x^2 - y^2) - (x^2 - y^2)^2 = (y^2 - x^2)(x^2 + y^2) + 1 \end{cases}$ [indeterminato]

135 $\begin{cases} x - (x - y)(1 + y) = y^2 + 1 - x - x(1 + y) \\ y(1 + x^2) + 3x + x^2 = x^2y + (1 + x)^2 + 4y - 13 \end{cases}$ $\left[\left(-\frac{9}{7}; \frac{25}{7}\right)\right]$

136 $\begin{cases} \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{2} + y\right)(1 - x) + \frac{x^2}{2}\right] = 1 - \frac{xy}{2} \\ \frac{1}{4}(3x - 11) + y = 0 \end{cases}$ $\left[\left(3; \frac{1}{2}\right)\right]$

6. Il metodo di Cramer

Teoria a pag. 712

RIFLETTI SULLA TEORIA

Il determinante

137 Come cambia il valore del determinante di un sistema lineare di due equazioni in due incognite se vengono scambiate le righe? E se si scambiano le colonne? E se si scambiano contemporaneamente righe e colonne?

Il metodo di Cramer

138 VERO O FALSO?

a) Se il determinante D di un sistema lineare con due equazioni in due incognite è nullo, allora il sistema è impossibile. V F

b) Il determinante D_x si ottiene dall'espressione del determinante D sostituendo nella prima colonna ai coefficienti dell'incognita x i termini noti. V F

c) Se il determinante D_y è nullo, allora $y = 0$. V F

d) Il determinante D_y del sistema $\begin{cases} 3x - 5y - 2 = 0 \\ 4x + 3y + 5 = 0 \end{cases}$ è $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$ V F

ESERCIZI

Il calcolo dei determinanti

ESERCIZIO GUIDA

139 Calcoliamo il determinante $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$

Poiché, in generale:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

nel nostro caso abbiamo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 4 \cdot 3 = -2 - 12 = -14.$$

Calcola i seguenti determinanti.

140 $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ $[-1]$

141 $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ $[1]$

142 $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ $[0]$

143 $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ $[-22]$

144 $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$ $[22]$

145 $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$ $[1]$

146 $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ -6 & 8 \end{vmatrix}$ $[2]$

147 $\begin{vmatrix} 2a^2 & -3a^3 \\ -5a & 4a^2 \end{vmatrix}$ $[-7a^4]$

148 $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ 2a+2b & 3a-3b \end{vmatrix}$ $[a^2-b^2]$

149 TEST Quale delle seguenti equazioni deve essere sostituita ai puntini in modo tale che il sistema

$$\begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

abbia il determinante D uguale a -2?

A $-2x + 6y = 0$
B $2x + 6y = 3$
C $-2x - 6y = 3$
D $2x - 6y = 3$
E $6x - 2y = 3$

150 TEST Il determinante del sistema $\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ 2y - x = 3 \end{cases}$ vale:

A 5 B -11 C 10 D 2 E -10

151 Per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ il determinante

$$\begin{vmatrix} k & 3 \\ 2-3k & 4 \end{vmatrix}$$

è uguale a -1? $\left[\frac{5}{13}\right]$

Il metodo di Cramer

Nel sito: ▶ 8 esercizi di recupero

ESERCIZIO GUIDA

152 Utilizzando il metodo di Cramer, risolviamo i sistemi:

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 4x + 7y = 15 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -2x + y = 2 \\ 6x - 3y = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ -6x + 4y = -10 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2\,x - 3\,y = 1 \\ 4\,x + 7\,y = 15 \end{cases}$

Calcoliamo il determinante D, formato dai coefficienti di x e di y:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & +7 \end{vmatrix} = 14 + 12 = 26.$$

Calcoliamo D_x, ottenuto da D sostituendo la prima colonna dei coefficienti di x con i termini noti:

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 15 & +7 \end{vmatrix} = 7 + 45 = 52.$$

Calcoliamo D_y, ottenuto da D sostituendo la seconda colonna dei coefficienti di y con i termini noti:

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 15 \end{vmatrix} = 30 - 4 = 26.$$

Calcoliamo la soluzione:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{52}{26} = 2; \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{26}{26} = 1.$$

La soluzione del sistema è $(2; 1)$.

b) $\begin{cases} -2x + y = 2 \\ 6x - 3y = 4 \end{cases}$

Calcoliamo $D = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0.$

Il sistema non è determinato. Per decidere se è impossibile o indeterminato, calcoliamo D_x. Se $D_x = 0$, dobbiamo calcolare anche D_y; se invece $D_x \neq 0$, il sistema è impossibile.

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 4 = -10 \neq 0.$$

Il sistema è quindi impossibile.

c) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ -6x + 4y = -10 \end{cases}$

Calcoliamo $D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0.$

Il sistema non è determinato.

Calcoliamo $D_x = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -10 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 20 = 0.$

Calcoliamo $D_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -6 & -10 \end{vmatrix} =$

$= -30 + 30 = 0.$

Essendo $D = 0$, $D_x = 0$, $D_y = 0$, il sistema è indeterminato.

Risolvi i seguenti sistemi, utilizzando il metodo di Cramer.

153 $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$ $[(1; 2)]$

154 $\begin{cases} 2x - 4 + y^2 = y(y-3) + 16 \\ 2x - 3y = 8 \end{cases}$ $[(7; 2)]$

155 $\begin{cases} 3x + 2y + 4 = 0 \\ x(2x-1) - x^2 + y = x^2 + 2y + 3 \end{cases}$ $[(2; -5)]$

156 $\begin{cases} 4x + 5y + 23 = 0 \\ 9(2-x) + y + 7 = -9 \end{cases}$ $[(3; -7)]$

157 $\begin{cases} 4x + 2y + 5 = 3 \\ \dfrac{6}{5}y + \dfrac{3}{2}x - 1 = -4 \end{cases}$ $[(2; -5)]$

158 $\begin{cases} \dfrac{3}{4}x + y = -2 \\ \dfrac{4}{5}y + x = 2 - \dfrac{x}{2} \end{cases}$ $[(4; -5)]$

159 $\begin{cases} \dfrac{2}{3}y + \dfrac{1}{5}x = 5 \\ 2x - \dfrac{5}{6}y + 3 = 8 \end{cases}$ $[(5; 6)]$

160 $\begin{cases} \dfrac{x + 2y}{3} + 1 = \dfrac{1}{3} \\ 3x + 5y = -4 \end{cases}$ $[(2; -2)]$

161 $\begin{cases} 2x + 5y = -1 \\ x(x-2) + y(y+3) = (x+y)^2 - 2xy - 7 \end{cases}$ $[(2; -1)]$

162 $\begin{cases} 6x - 2y = 1 \\ y = 3x - 4 \end{cases}$ [impossibile]

163 $\begin{cases} 2(2y - x) = 6(x-1) \\ 4x - 2y = 3 \end{cases}$ [indeterminato]

BRAVI SI DIVENTA ► E32

164 $\begin{cases} \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + y(x-8) = x(1+y) - (2-x)(x+2) + \dfrac{9}{4} \\ \dfrac{3(y+1) - x}{2} = \dfrac{x}{3} + \dfrac{7y - x - 4}{6} \end{cases}$

RIEPILOGO LA RISOLUZIONE DEI SISTEMI

165 **VERO O FALSO?**

a) Il sistema $\begin{cases} x + 4y = 3 \\ ax + 8y = 6 \end{cases}$ per $a = 2$ è impossibile. V F

b) Il determinante $\begin{vmatrix} k-1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ vale 0 se $k = 1$. V F

c) Il sistema $\begin{cases} x = y - 1 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$ rappresenta nel piano cartesiano due rette parallele, quindi è impossibile. V F

d) Il sistema $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ y = -x + 5 \end{cases}$ è equivalente a $\begin{cases} y = x - 3 \\ x + y = 5 \end{cases}$ V F

166 Dimostra che il sistema $\begin{cases} 4x - 3y = 2 \\ 8x - 6y = 4 \end{cases}$ è indeterminato. Come puoi esprimere le infinite coppie di soluzioni utilizzando un solo parametro reale? $\left[\left(k; \dfrac{4k-2}{3}\right), \text{con } k \in \mathbb{R}\right]$

167 **COMPLETA** i seguenti sistemi in modo che ognuno sia come indicato a fianco.

$\begin{cases} 3x - 2y = \ldots \\ 9x - 6y = 1 \end{cases}$ indeterminato; $\begin{cases} 5x - 6y = 1 \\ 2x - \ldots y = 3 \end{cases}$ impossibile;

$\begin{cases} \ldots x + 2y = 1 \\ 4x + 3y = 3 \end{cases}$ determinato; $\begin{cases} -x + 3y = 2 \\ 3x - 9y = \ldots \end{cases}$ impossibile.

168 Dimostra che il sistema $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -4x + 2y = 1 \end{cases}$ è impossibile in tre modi:

a) risolvendolo;
b) interpretando graficamente il sistema;
c) considerando i rapporti dei coefficienti.

169 Tra le equazioni

a) $\frac{2}{3}x - \frac{4}{5}y = 6$, b) $-5x + 3y = 1$, c) $\frac{1}{3}x - \frac{2}{5}y = 3$, d) $\frac{1}{6}x - \frac{1}{5}y = 2$,

quali puoi scegliere per costruire un sistema che abbia determinante D nullo e D_x e D_y non nulli? E quali per ottenere un sistema che abbia determinante D uguale a 1? [a) e d) oppure c) e d); b) e c)]

170 Dopo aver scritto in forma normale il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} 2 & y \\ -1 & x \end{vmatrix} = -1 \\ \begin{vmatrix} x & -4 \\ y & 3 \end{vmatrix} = 1 \end{cases}$$

risolvilo con il metodo che ritieni più opportuno. Il sistema ammette le stesse soluzioni se nei due determinanti scambi la prima riga con la seconda? Quale altro cambiamento devi fare, oltre a operare questo scambio, affinché il sistema sia equivalente a quello dato?
[(− 1; 1); no; occorre cambiare i segni del secondo membro di ogni equazione]

I sistemi numerici interi

Risolvi i seguenti sistemi lineari, utilizzando per ciascuno il metodo che ritieni più opportuno.

171 $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ x(x-2) + 7 = -10 + y(1+y) + (x-y)(x+y) \end{cases}$ [(10; − 3)]

172 $\begin{cases} 5 - x + (x-3y)(x+1) + y^2 + xy = (x-y)^2 + x - 2y + 10 \\ 5 + y = 0 \end{cases}$ [(0; − 5)]

173 $\begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + \frac{5}{2}\right) - \left(x + \frac{3}{4}\right)\left(x - \frac{3}{4}\right) - \frac{9}{16} = -x^2 - \frac{y}{3} \\ -\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = \frac{5}{2} \end{cases}$ [(15; − 15)]

174 $\begin{cases} \frac{1}{3}x = \frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{3}\right) \\ \frac{1}{2}(x-y) = \frac{2}{3} - \frac{3}{2}x \end{cases}$ $\left[\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)\right]$

175 $\begin{cases} \frac{1}{3}(x+y)-\frac{1}{2}=\frac{2}{3}(y-x)+\frac{1}{6} \\ \frac{3}{2}(2y-x+2)=\frac{1}{2}y+3 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{5}{6};\frac{1}{2}\right)\right]$

176 $\begin{cases} \frac{1}{7}(x+3)=\frac{1}{2}\left(\frac{8}{7}-y\right)-\frac{1}{7} \\ 2x=\frac{1}{2}(9-5y) \end{cases}$ $\left[\left(\frac{7}{2};-1\right)\right]$

177 $\begin{cases} \frac{1}{6}(x+1)=\frac{1}{2}x+\frac{9}{4}y \\ \frac{1}{4}y-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}(1-x) \end{cases}$ $\left[\left(5;-\frac{2}{3}\right)\right]$

178 $\begin{cases} \frac{4x-1}{3}-\frac{y-1}{2}=\frac{2x-5}{3} \\ \frac{3y-2}{4}-\frac{y-2x}{2}=\frac{8x+3}{4} \end{cases}$ $\left[\left(-\frac{1}{2};3\right)\right]$

179 $\begin{cases} 4(x-y)=y-\frac{5}{4} \\ 4\left(x+\frac{1}{2}y\right)=\frac{11}{2}-2y \end{cases}$ $\left[\left(\frac{5}{8};\frac{3}{4}\right)\right]$

180 $\begin{cases} \frac{5}{6}x+\frac{3}{5}y=\frac{1}{2}\left(x-\frac{4}{5}\right) \\ 2\left(x+y+\frac{1}{9}\right)=y+1 \end{cases}$ $\left[\left(1;-\frac{11}{9}\right)\right]$

181 $\begin{cases} \frac{1}{11}(x+12y)=y+\frac{4}{15} \\ \frac{1}{5}x-3y=\frac{1}{5}\left(\frac{8}{3}-4x\right) \end{cases}$ $\left[\left(\frac{7}{3};\frac{3}{5}\right)\right]$

182 $\begin{cases} \frac{1}{2}(5x-3y)-\frac{2x-1}{3}=8+\frac{1}{2}(6y-5) \\ \frac{2x-3}{4}-\frac{1-3y}{2}=\frac{6y-1}{2}+\frac{3}{4} \end{cases}$ $\left[\left(2;-\frac{1}{3}\right)\right]$

183 $\begin{cases} 2(2y-1)=-\frac{1}{3}x \\ \frac{x+3y-1}{3}=2\left(\frac{1}{3}x-y\right) \end{cases}$ $\left[\left(2;\frac{1}{3}\right)\right]$

184 $\begin{cases} \frac{1}{3}x=\frac{1}{2}\left(y-\frac{1}{3}\right) \\ \frac{1}{2}(x-y)=\frac{2}{3}-\frac{3}{2}x \end{cases}$ $\left[\left(\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)\right]$

185 $\begin{cases} (x+y)\left(\frac{1}{15}+y\right)-xy+\frac{y}{5}=\frac{2}{5}+\frac{1}{15}y+y^2 \\ 1-\frac{2y}{15}=-\frac{x}{5} \end{cases}$ $[(-3;3)]$

186 $\begin{cases} \frac{-(x+1)(x-1)+x(x+1)}{2}-1=\frac{y+3}{4} \\ \frac{1}{2}\left[(x-1)-\frac{y-1}{2}\right]=1 \end{cases}$ [indeterminato]

187 $\begin{cases} \frac{1}{6}[3x-4y-(2x-7)]+\frac{x(x-1)}{4}-\frac{1}{4}x^2=\frac{1}{2}y \\ \frac{x-2y}{2}-\frac{3x+y}{3}=\frac{3-y}{3} \end{cases}$ $\left[\left(-\frac{14}{3};\frac{4}{3}\right)\right]$

188 $\begin{cases} \frac{(y-x)(1+x)-x(y-x)}{10}=\frac{y}{6}-4 \\ \frac{(y-x)(y+x)-(x-y)}{2}-\frac{x}{4}=6+\frac{y^2-x^2}{2} \end{cases}$ $[(16;36)]$

189 $\begin{cases} \dfrac{2}{15} - xy = \dfrac{3}{5} + (1-y)(x-1) \\ (x+y)(4-x) + x^2 + 2x = 2 - xy + y \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{2}{15}; \dfrac{2}{5}\right)\right]$

190 $\begin{cases} \dfrac{1}{3}(x+2y)(x+1) - \dfrac{2}{3}xy - 5 = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y-x}{4} \\ \dfrac{2(x-8)-y}{7} - 2 = -\dfrac{y+4}{3} \end{cases}$ $[(35; -37)]$

191 $\begin{cases} 3x(2y-2) + 3x - 2y - 6 + 2y = 5(3x-1) - 2y + 1 + (3x-1)(2y-1) \\ 1 - 3x + (3x+4y-3)^2 + 1 + 3(x-y) - y = 3x(3x-2) + 4(2y-1)(2y+3x-2) \end{cases}$ $\left[\left(0; \dfrac{3}{4}\right)\right]$

192 $\begin{cases} \dfrac{2}{3}x + [(x+2y)(x-1) - x^2 + x] = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{y}{2}\right) + y(2x-2) \\ 2y - \dfrac{13}{3}x = -3 \end{cases}$ $\left[\left(1; \dfrac{2}{3}\right)\right]$

193 $\begin{cases} \dfrac{3}{2}x - y + (x-y)^2 - 4xy = \dfrac{1}{2} + x^2 + y^2 - 6xy \\ \dfrac{3}{2}(x-1) - \left(y - \dfrac{1}{3}x\right) = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{2} \end{cases}$ [impossibile]

194 $\begin{cases} (x+2y)^2 - x(x-1) - y(1+4y) = 3 + 4xy \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{5} = \dfrac{3}{4}y \end{cases}$ $[(5; 2)]$

195 $\begin{cases} \dfrac{1}{2}(x+y)^2 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x+y}{2} - \dfrac{x}{3} - xy = \dfrac{y^2}{2} - \dfrac{2}{3}y \\ \dfrac{x-y}{3} - 1 = -\dfrac{x+3y}{2} \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{3}{2}; -\dfrac{3}{14}\right)\right]$

196 $\begin{cases} (2x-1)^2 - (x-2)(4x+3) = (y-1)(y+2) - y^2 \\ \dfrac{x-2y}{2} - \dfrac{1}{4}(2-x) = \dfrac{1}{4}(5-y) \end{cases}$ [impossibile]

197 $\begin{cases} \dfrac{(x+y)[1-(x-y)] + x^2}{6} + \dfrac{2}{3} - \dfrac{y^2}{6} = 2 - \dfrac{3}{2} + \dfrac{x+y}{4} \\ \dfrac{y+4}{3} = \dfrac{x-6}{2} \end{cases}$ $[(6; -4)]$

198 $\begin{cases} \dfrac{1}{2}(x-2y)(2x-y) - \dfrac{1}{3}x(3x-1) = \dfrac{1}{3}y\left(1 - \dfrac{15}{2}x + 3y\right) + \dfrac{5}{6} \\ \dfrac{1}{2}(3x-1) - \dfrac{1}{3}(y-2x) = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{6}(2y+7) \end{cases}$ [indeterminato]

I sistemi numerici fratti

ESERCIZIO GUIDA

199 Risolviamo il seguente sistema fratto:

$$\begin{cases} \dfrac{y-1}{x-1}=2 \\ 1-\dfrac{5}{y}=\dfrac{18-6x}{y} \end{cases}$$

C.E.: $x \neq 1 \wedge y \neq 0$

Riduciamo il sistema a forma normale, moltiplicando la prima equazione per $x-1$ e la seconda per y:

$$\begin{cases} \dfrac{y-1}{\cancel{x-1}}\cdot(\cancel{x-1})=2\cdot(x-1) \\ \left(1-\dfrac{5}{y}\right)\cdot y=\dfrac{18-6x}{\cancel{y}}\cdot\cancel{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-1=2x-2 \\ y-5=18-6x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x+y=-1 \\ 6x+y=23 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x-y=1 \\ 6x+y=23 \end{cases} \quad \text{(forma normale)}$$

Poiché $\dfrac{2}{6}\neq -1$, il sistema è determinato.

Risolviamo il sistema con il metodo di riduzione. Sommiamo membro a membro le due equazioni per eliminare y:

$$\boxed{+}\begin{cases} 2x-y=1 \\ 6x+y=23 \end{cases}$$
$$8x \quad = 24$$

$$x=\frac{24}{8}=3.$$

Sostituiamo $x=3$ a una delle due equazioni, per esempio alla prima:

$$\begin{cases} x=3 \\ 2x-y=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=3 \\ 6-y=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=3 \\ -y=-5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$$

Poiché abbiamo ottenuto per x un valore diverso da 1 e per y un valore diverso da 0, la soluzione (3; 5) è accettabile.

Risolvi i seguenti sistemi di equazioni fratte (nelle soluzioni sono omesse le condizioni di esistenza).

200 $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=0 \\ 8x-1=-15y \end{cases}$ $[(2; -1)]$

201 $\begin{cases} \dfrac{y}{x-2}=4 \\ \dfrac{x}{2}=y+8 \end{cases}$ $[(0; -8)]$

202 $\begin{cases} \dfrac{x+1}{y-3}=2 \\ \dfrac{x+1}{2}=y-3 \end{cases}$ [indeterminato]

203 $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{x} \\ x-y=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$ $\left[\left(-3; -\dfrac{3}{2}\right)\right]$

204 $\begin{cases} \dfrac{8}{y}=\dfrac{2}{x} \\ \dfrac{x+4}{y-2}=1 \end{cases}$ $[(2; 8)]$

205 $\begin{cases} \dfrac{x-y}{x+4}=2 \\ \dfrac{x+5}{y+3}=-1 \end{cases}$ [indeterminato]

206 $\begin{cases} \dfrac{2(1-2x)}{6-3y} = -1 \\ x+y=3 \end{cases}$ $[(-1; 4)]$

207 $\begin{cases} \dfrac{1}{xy} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{y} \\ \dfrac{x+2}{x} = \dfrac{y+2}{y} + \dfrac{3}{xy} \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{1}{2}; 2\right)\right]$

208 $\begin{cases} \dfrac{14}{x} - \dfrac{10}{y} = \dfrac{13}{2x} + \dfrac{25}{2xy} \\ y-3x=0 \end{cases}$ $[(1; 3)]$

209 $\begin{cases} \dfrac{y(2x+1)}{x-1} - 3y = \dfrac{x(2-y)}{x-1} \\ 2y\left(1-\dfrac{x}{2}\right) = -x\left(y-\dfrac{4}{x}\right) \end{cases}$ $[(4; 2)]$

210 $\begin{cases} \dfrac{y+1}{6-4x} - \dfrac{1-2x}{2x-3} = \dfrac{x-y}{12-8x} \\ x-y=\dfrac{4}{3} \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{1}{3}; -1\right)\right]$

211 $\begin{cases} \dfrac{y+x^2}{x-3} - 2x = \dfrac{x^2+3x+9}{3-x} \\ -y+9=3x \end{cases}$ $[(-3; 18)]$

212 $\begin{cases} -\dfrac{1}{x+4} = \dfrac{1}{y-1} \\ \dfrac{1}{3y+1} - \dfrac{1}{5x} = 0 \end{cases}$ $[(-1; -2)]$

213 $\begin{cases} 3x - y(1-2x) = 2(1+xy) \\ (x-1)\left(-\dfrac{1}{y}\right) = \dfrac{2x+3}{y} - 3 \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{4}{3}; 2\right)\right]$

214 $\begin{cases} \dfrac{1}{y} - \dfrac{x}{xy-2y} = \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{2}{x-2} \\ y-x=-1 \end{cases}$ [impossibile]

215 $\begin{cases} \dfrac{2x-y}{y+2} = 3 \\ \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{2}y = 2 \end{cases}$ $[(15; 6)]$

216 $\begin{cases} \dfrac{y}{x^2-4} = \dfrac{1+y}{x^2-4x+4} \\ y+x=4(1+x) \end{cases}$ $\left[\left(-\dfrac{18}{13}; -\dfrac{2}{13}\right)\right]$

217 $\begin{cases} \dfrac{x-1}{y} = \dfrac{1}{4} \\ 2x+y=-1 \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{1}{2}; -2\right)\right]$

218 $\begin{cases} \dfrac{2-y}{x+3} = \dfrac{1}{3} \\ 3x-y=4 \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{1}{2}\right)\right]$

219 $\begin{cases} \dfrac{x-\dfrac{1}{2}}{y} + 3 = \dfrac{4x-2}{2} - 2x \\ 3x-2y=\dfrac{3}{2} \end{cases}$ [impossibile]

220 $\begin{cases} \dfrac{\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}}{y} + \dfrac{9}{10} = \dfrac{\dfrac{2}{5}x-\dfrac{1}{4}}{y} \\ 2(x+y)=3 \end{cases}$ $\left[\left(2; -\dfrac{1}{2}\right)\right]$

221 $\begin{cases} \dfrac{2x-8y}{x-2} = \dfrac{6x+1}{3(x-2)} + \dfrac{2(4y-1)}{2-x} \\ \dfrac{3x}{y-1} - 1 = -\dfrac{6}{1-y} \end{cases}$ [impossibile]

222 $\begin{cases} \dfrac{2+x}{1+x} - \dfrac{x+1}{y} = 1 - \dfrac{x^2}{y+xy} \\ x=1+y \end{cases}$ $[(-2; -3)]$

223 $\begin{cases} \dfrac{3x-2}{2y-3} - \dfrac{3x-5}{2y+3} = \dfrac{54}{9-4y^2} \\ \dfrac{2y-1}{x} - \dfrac{6y-7}{3x-1} = \dfrac{8}{x-3x^2} \end{cases}$ $\left[\left(-2; \dfrac{1}{2}\right)\right]$

224 $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{3y+2} = \dfrac{2x-5}{3y-2} \\ \dfrac{3y-4}{4x-1} = \dfrac{3y-10}{4x} \end{cases}$ [impossibile]

225 $\begin{cases} \dfrac{2y-1}{x} = \dfrac{1+2x}{3x} \\ \dfrac{4}{x+y} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$ $[(4; 2)]$

7. I sistemi letterali

Teoria a pag. 714

RIFLETTI SULLA TEORIA

226 VERO O FALSO?

a) Un sistema letterale non può essere fratto. V F

b) Il sistema $\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$ nelle incognite x e y è letterale intero. V F

c) Un sistema letterale può essere risolto solo con il metodo di Cramer. V F

d) La soluzione di un sistema letterale dipende dai valori assunti dai parametri. V F

227 TEST Per quali valori reali di a e di b il sistema

$$\begin{cases} x - 3ay = 3a \\ x + by = -2 \end{cases}$$

ha soluzione $(0; -1)$?

A $a = 2, b = 0$

B $a = 0, b = -2$

C $\forall a \in \mathbb{R}, b = 2$

D $\forall b \in \mathbb{R}, a = 2$

E $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}$

228 È dato il sistema:

$$\begin{cases} \frac{5}{3}kx + 2y = \frac{8}{5} \\ \frac{2}{3}hx + 5y = \frac{4}{7} \end{cases}$$

Determina almeno due coppie di valori reali di h e di k per i quali x abbia, nelle due equazioni, coefficienti opposti. Risolvi i sistemi corrispondenti alle coppie di valori determinate.

ESERCIZI

Nel sito: ▶ 10 esercizi in più

I sistemi letterali interi

ESERCIZIO GUIDA

229 Discutiamo e risolviamo il seguente sistema letterale nelle incognite x e y al variare del parametro a in $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2x + y = 2a \\ (a + 1)x + ay = 2a \end{cases}$$

Il sistema è ridotto in forma normale. Applichiamo il metodo di Cramer.
Calcoliamo i determinanti D, D_x, D_y.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ a+1 & a \end{vmatrix} = 2a - (a + 1) = 2a - a - 1 = a - 1.$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2a & 1 \\ 2a & a \end{vmatrix} = 2a^2 - 2a = 2a(a - 1). \quad D_y = \begin{vmatrix} 2 & 2a \\ a+1 & 2a \end{vmatrix} = 4a - 2a(a + 1) = 2a - 2a^2 = 2a(1 - a).$$

Il sistema è determinato se $D \neq 0$, cioè se $a - 1 \neq 0 \ \rightarrow \ a \neq 1$.

- Se $a \neq 1$, si ha $\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{2a\cancel{(a-1)}}{\cancel{a-1}} = 2a \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{2a(1-a)}{a-1} = \dfrac{-2a\cancel{(a-1)}}{\cancel{a-1}} = -2a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2a \\ y = -2a \end{cases}$

- Se $a = 1$, si ha $D = 0$, $D_x = 0$ e $D_y = 0$, quindi il sistema è indeterminato.

In sintesi:
- se $a \neq 1$, il sistema è determinato e la soluzione è $(2a, -2a)$;
- se $a = 1$, il sistema è indeterminato.

Risolvi e discuti i seguenti sistemi letterali nelle incognite x e y al variare del parametro in $\mathbb{R}$.

230 $\begin{cases} 3x - y = 6a - 1 \\ x + 2y = 2(a + 1) \end{cases}$ $[(2a; 1)]$

231 $\begin{cases} x + y = 3a \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$ $[(6a; -3a)]$

232 $\begin{cases} 3ax + 5ay + 2a = -a \\ x + y = 3 \end{cases}$ $[a \neq 0, (9; -6); a = 0, \text{indet.}]$

233 $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x + 5y = -7a \end{cases}$ $[(a; -2a)]$

234 $\begin{cases} x + 4y = a \\ x + 3y = 2a \end{cases}$ $[(5a; -a)]$

235 $\begin{cases} ax + ay = a \\ ax + (a + 1)y = 2a \end{cases}$ $[a \neq 0, (1 - a; a); a = 0, \text{indet.}]$

236 $\begin{cases} x + 3y = a \\ x - y = 5 \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{a+15}{4}; \dfrac{a-5}{4}\right)\right]$

237 $\begin{cases} bx + b - by = 4b \\ 2bx - b + by = 0 \end{cases}$ $\left[b \neq 0, \left(\dfrac{4}{3}; -\dfrac{5}{3}\right); b = 0, \text{indet.}\right]$

238 $\begin{cases} 2x - 3ay = -10a \\ x - 3y = a - 12 \end{cases}$ $[a \neq 2, (a; 4); a = 2, \text{indet.}]$

239 $\begin{cases} 3ax + 4y = -4a \\ 2ax - 4y = 24a \end{cases}$ $[a \neq 0, (4; -4a); a = 0, \text{indet.}]$

240 $\begin{cases} ax + y + 1 = a - x \\ x - ay + y = a - 1 \end{cases}$ $\left[a \neq 0, \left(\dfrac{a-1}{a}; \dfrac{1-a}{a}\right); a = 0, \text{indet.}\right]$

241 $\begin{cases} (x - y)(1 + x) - x^2 + x = a + b - xy \\ x - y = b \end{cases}$ $[(a; a - b)]$

242 $\begin{cases} (x + 1)^2 - x^2 - y = 2a \\ (y + x)(1 - a) + ay - 2x = 1 + a(1 - x) \end{cases}$ $[(3a; 4a + 1)]$

243 $\begin{cases} ax + y = 5 \\ (a + 2)x - 3y = a \end{cases}$ $\left[a \neq -\dfrac{1}{2}, \left(\dfrac{15+a}{4a+2}; -\dfrac{a^2-5a-10}{4a+2}\right); a = -\dfrac{1}{2}, \text{imp.}\right]$

244 $\begin{cases} k(x + y) - (x - y + 5) = k \\ kx + 2ky + k = 15 \end{cases}$ $\left[k \neq 3 \wedge k \neq 0, \left(\dfrac{3k+5}{k}; \dfrac{5-2k}{k}\right); k = 3, \text{indet.}; k = 0, \text{imp.}\right]$

245 $\begin{cases} a(x - 1) + 2x + y = 7 \\ a(-2x - 1) = 3y + 3 \end{cases}$ $[a = -6, \text{indet.}; a \neq -6, (4; -3a - 1)]$

246 $\begin{cases} 2x - y = 1 - ay \\ 3(a - 2)y = x + a - 7 \end{cases}$ $\left[a = \dfrac{13}{7}, \text{imp.}; a \neq \dfrac{13}{7}, \left(\dfrac{a^2-11a+13}{13-7a}; \dfrac{2a-13}{7a-13}\right)\right]$

247 $\begin{cases} ax = 2a + 6ay \\ a(x+y) = 3 + 2(x+y) \end{cases}$ $\left[a = 0, \text{ indet.}; a = 2, \text{ imp.}; a \neq 0 \wedge a \neq 2, \left(\frac{2a+14}{7a-14}; \frac{-2a+7}{7a-14}\right)\right]$

248 $\begin{cases} 2(a+1)x + 12y = 3a \\ 2ax + 4ay = a + 2 \end{cases}$ $\left[a = 0, \text{ imp.}; a = 2, \text{ indet.}; a \neq 0 \wedge a \neq 2, \left(\frac{3a+3}{2a}; \frac{-2a-1}{4a}\right)\right]$

249 $\begin{cases} x - 2ay = 1 \\ \frac{x}{3a} + \frac{y}{2} = \frac{1}{a} \end{cases}$ $\left[a = 0, \text{ perde sign.}; a \neq 0, \left(\frac{15}{7}; \frac{4}{7a}\right)\right]$

250 $\begin{cases} 3x - y = 3b \\ \frac{x}{2b} + \frac{y}{b} = \frac{1}{2} \end{cases}$ $[b = 0, \text{ perde sign.}; b \neq 0, (b; 0)]$

251 $\begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{2y}{3b} = 1 + \frac{1}{6} \\ 2bx - y = 3b \end{cases}$ $[b = 0, \text{ perde sign.}; b \neq 0, (2; b)]$

252 $\begin{cases} 2x - 3y = 5a \\ \frac{1}{5a}(x+y) = \frac{7}{3} \end{cases}$ $\left[a = 0, \text{ perde sign.}; a \neq 0, \left(8a; \frac{11a}{3}\right)\right]$

253 $\begin{cases} 5x - by = 3b \\ \frac{10x}{3b} + \frac{y}{2} = 1 \end{cases}$ $\left[b = 0, \text{ perde sign.}; b \neq 0, \left(\frac{3}{7}b; -\frac{6}{7}\right)\right]$

254 $\begin{cases} \frac{3x}{2ab} + \frac{y}{a} = 3 \\ 2x - by = ab \end{cases}$ $\left[a = 0 \vee b = 0, \text{ perde sign.}; a \neq 0 \wedge b \neq 0, \left(\frac{8ab}{7}; \frac{9}{7}a\right)\right]$

255 $\begin{cases} x + 2y = 3a \\ \frac{2x}{3a} - \frac{y}{a} = 1 \end{cases}$ $\left[a = 0, \text{ perde sign.}; a \neq 0, \left(\frac{15}{7}a; \frac{3a}{7}\right)\right]$

256 $\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{2} = 1 \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{3} = 2 \end{cases}$ $\left[a = 0, \text{ perde sign.}; a \neq 0, \left(\frac{8}{5}a; -\frac{6}{5}\right)\right]$

257 $\begin{cases} 2ax + 5by = 2ab \\ \frac{2x}{5b} + \frac{y}{2a} = 1 \end{cases}$ $\left[a = 0 \vee b = 0, \text{ perde sign.}; a \neq 0 \wedge b \neq 0, \left(4b; -\frac{6}{5}a\right)\right]$

258 $\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{3b} = 1 \\ 2bx - 3ay = ab \end{cases}$ $\left[a = 0 \vee b = 0, \text{ perde sign.}; a \neq 0 \wedge b \neq 0, \left(\frac{10}{11}a; \frac{3}{11}b\right)\right]$

259 $\begin{cases} \frac{x}{3a-1} + \frac{y}{2} = 2 \\ 2x - y + 4 = 0 \end{cases}$ $\left[a = \frac{1}{3}, \text{ perde sign.}; a = 0, \text{ indet.}; a \neq 0 \wedge a \neq \frac{1}{3}, (0; 4)\right]$

260 $\begin{cases} \dfrac{x+y+a}{a+b} - \dfrac{x-y-a}{a-b} = 2 \\ x+y=b \end{cases}$ $[a = b \vee a = -b, \text{ perde sign.}; a \neq \pm b, (b; 0)]$

261 $\begin{cases} x+2y = a+2 \\ (a-1)x + ay = 2a \end{cases}$ $[a = 2, \text{ indet.}; a \neq 2, (-a; a+1)]$

262 $\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{a-1} - \dfrac{2a-1}{a^2-a} = 0 \\ ax + (a+1)y = 2a \end{cases}$ $[a = 0 \vee a = 1, \text{ perde sign.}; a \neq 0 \wedge a \neq 1, (1-a; a)]$

263 $\begin{cases} ax + by = a \\ ax - by = 0 \end{cases}$ $\left[a = 0, \text{ indet.}; a \neq 0 \wedge b = 0, \text{ imp.}; a \neq 0 \wedge b \neq 0, \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{a}{2b}\right)\right]$

264 $\begin{cases} mx + ny = m+n \\ mx - ny = m-n \end{cases}$ $[m = 0 \vee n = 0, \text{ indet.}; m \neq 0 \wedge n \neq 0, (1; 1)]$

265 $\begin{cases} 2ax + by = a+b \\ 2ax - by = a-b \end{cases}$ $\left[a = 0 \vee b = 0, \text{ indet.}; a \neq 0 \wedge b \neq 0, \left(\dfrac{1}{2}; 1\right)\right]$

266 $\begin{cases} (x+y)(1-x) + x^2 = a - xy \\ b(x-b) + ay = 0 \end{cases}$ $[a = b, \text{ indet.}; a \neq b, (a+b; -b)]$

267 $\begin{cases} a(x-2b) + y(y+b) = (y-b)(y+b) + b^2 \\ ax - by = 0 \end{cases}$ $[a = 0 \vee b = 0, \text{ indet.}; a \neq 0 \wedge b \neq 0, (b; a)]$

268 $\begin{cases} (b+1)x + y = b^2 + b \\ x - by = -b^2 - 1 \end{cases}$ $[(b-1; b+1)]$

269 $\begin{cases} a(x-a) + a(y+2a) = 2a^2 \\ \dfrac{x+a}{a} + \dfrac{y}{a} = 2 \end{cases}$ $[a = 0, \text{ perde sign.}; a \neq 0, \text{ indet.}]$

270 $\begin{cases} 2(x-2a^2) = 3(y+3a^2) \\ \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x+y}{a^2} - 2\right) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-y}{a^2} - 3\right) = 0 \end{cases}$ $[a = 0, \text{ perde sign.}; a \neq 0, (2a^2; -3a^2)]$

271 $\begin{cases} \dfrac{2}{3}x + \dfrac{4y}{5a} = 1 \\ ax - y = a \end{cases}$ $\left[a = 0, \text{ perde sign.}; a \neq 0, \left(\dfrac{27}{22}; \dfrac{5}{22}a\right)\right]$

272 $\begin{cases} \dfrac{3x}{2a-1} + \dfrac{y}{2} = 1 \\ x - 2ay = 2 - y \end{cases}$ $\left[a = \dfrac{1}{2}, \text{ perde sign.}; a \neq \dfrac{1}{2}, \left(\dfrac{4a}{7}; \dfrac{2(2a-7)}{7(2a-1)}\right)\right]$

273 $\begin{cases} \dfrac{x+y+b}{a+b}+\dfrac{x-y-b}{a-b}=2 \\ x+y=a \end{cases}$ $[a=b \vee a=-b,\text{ perde sign.}; a\neq \pm b, (a;0)]$

274 $\begin{cases} 2x-y=a+3 \\ ax+y+2=(a+1)^2 \end{cases}$ $[a=-2,\text{ indet.}; a\neq -2, (a+1; a-1)]$

275 $\begin{cases} a(1-x-y)+y^2=y(y-1)+y \\ a(x-2)=-(a+1)y \end{cases}$ $[a=0,\text{ indet.}; a\neq 0, (1-a;a)]$

276 $\begin{cases} x-a(x+y)+2a=1 \\ a(x+y)-2a=-y \end{cases}$ $[(1-a;a)]$

277 $\begin{cases} (a+1)x+y=a-1 \\ x-(a-1)y=a-1 \end{cases}$ $\left[a=0,\text{ indet.}; a\neq 0, \left(\dfrac{a-1}{a};\dfrac{1-a}{a}\right)\right]$

278 $\begin{cases} ax+(a-2)y=3a-2 \\ (a+1)x+ay=2a \end{cases}$ $[a=-2,\text{ indet.}; a\neq -2, (a;1-a)]$

279 $\begin{cases} 2bx-by+6b=2x+4 \\ 2bx+2b+y=by \end{cases}$ $\left[b=\dfrac{1}{2},\text{ indet.}; b\neq \dfrac{1}{2}, (b-2;2b)\right]$

280 $\begin{cases} ax-by=2a-b \\ ax+4by=2a+4b \end{cases}$ $[a=0 \vee b=0,\text{ indet.}; a\neq 0 \wedge b\neq 0, (2;1)]$

281 $\begin{cases} 5ay=a(x+1) \\ a(x+y-1)=2-3(x+y) \end{cases}$ $\left[a=0,\text{ indet.}; a=-3,\text{ imp.}; a\neq 0 \wedge a\neq -3, \left(\dfrac{4a+7}{6a+18};\dfrac{2a+5}{6a+18}\right)\right]$

282 $\begin{cases} ax+2ay=3a \\ (a^2-1)x+3(a^2-1)y=a-1 \end{cases}$

$\left[a=0, a=1,\text{ indet.}; a=-1,\text{ imp.}; a\neq 0 \wedge a\neq \pm 1, \left(\dfrac{9a+7}{a+1};\dfrac{-3a-2}{a+1}\right)\right]$

283 $\begin{cases} (a^2-2a)x-2ay=a \\ (a^2-4)x+(a+2)y=a-2 \end{cases}$ $\left[a=0,\text{ indet.}; a=\pm 2,\text{ imp.}; a\neq 0 \wedge a\neq \pm 2, \left(\dfrac{3a-2}{3a^2-12};\dfrac{-4}{3a+6}\right)\right]$

284 $\begin{cases} \dfrac{2x+y-2ab}{2a}-\dfrac{2x+y-2b^2}{2a-2b}=\dfrac{y}{b} \\ 2x+y=2a^2 \end{cases}$ $[a=0 \vee b=0 \vee a=b,\text{ perde sign.}; a\neq 0 \wedge b\neq 0 \wedge a\neq b, (a^2+b^2; -2b^2)]$

285 $\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=\dfrac{1}{a} \\ \dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{a}=\dfrac{1}{b} \end{cases}$ $[a=0 \vee b=0,\text{ perde sign.}; a=b \vee a=-b,\text{ indet.}; a\neq 0 \wedge b\neq 0 \wedge a\neq \pm b, (1;0)]$

286 $\begin{cases} ab(x+y) = a+b \\ ax+by = 2 \end{cases}$ $\left[a=0 \vee b=0, \text{ imp.}; a=b \wedge a \neq 0, \text{ indet.}; a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq b, \left(\frac{1}{a}; \frac{1}{b}\right)\right]$

287 $\begin{cases} (a-1)x+y = a+2 \\ (a^2-1)x+y = 2(a+1) \end{cases}$ $\left[a=0, \text{ indet.}; a=1, \text{ imp.}; a \neq 0 \wedge a \neq 1, \left(\frac{1}{a-1}; a+1\right)\right]$

288 $\begin{cases} \dfrac{k-x}{k^2+k} + \dfrac{y-2k}{k+1} = -1 \\ x = 2y \end{cases}$ $[k=0 \vee k=-1, \text{ perde sign.}; k=2, \text{ indet.}; k \neq 0 \wedge k \neq -1 \wedge k \neq 2, (2k; k)]$

289 $\begin{cases} bx-ay = 2b+a \\ 3b^2x+a^2y = ab \end{cases}$ $\left[a=0 \wedge b=0, a=-3b, \text{ indet.}; a=0 \wedge b \neq 0, a \neq 0 \wedge b=0, \text{ imp.}; a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq -3b, \left(\frac{a}{b}; -\frac{2b}{a}\right)\right]$

290 $\begin{cases} \dfrac{x+y}{a+b} = 1 \\ -\dfrac{y+2x}{a+b} = \dfrac{-2x}{a+b} - \dfrac{y}{a-b} + \dfrac{2b^2}{a^2-b^2} \end{cases}$ $[a=b \vee a=-b, \text{ perde sign.}; b=0, \text{ indet.}; a \neq \pm b \wedge b \neq 0, (a; b)]$

291 $\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{a-1} = \dfrac{2a-1}{a-1} \\ \dfrac{x}{a+2} + \dfrac{y}{a} = \dfrac{2a^2+a+2}{a^2+2a} \end{cases}$

$[a=-2 \vee a=0 \vee a=1, \text{ perde sign.}; a=2, \text{ indet.}; a \neq \pm 2 \wedge a \neq 0 \wedge a \neq 1, (2a; 1)]$

292 $\begin{cases} \dfrac{x+a}{a+1} + \dfrac{y+1}{a-1} = \dfrac{2(a^2+1)}{a^2-1} \\ x-y = a-1 \end{cases}$ $[a=1 \vee a=-1, \text{ perde sign.}; a=0, \text{ indet.}; a \neq \pm 1 \wedge a \neq 0, (a; 1)]$

293 $\begin{cases} \dfrac{3a^2+4}{a^2-4} + \dfrac{x+y}{2-a} = \dfrac{a-2}{a+2} \\ x+a-2y = 6 \end{cases}$ $[a=2 \vee a=-2, \text{ perde sign.}; a \neq \pm 2, (a+2; a-2)]$

294 $\begin{cases} (m+2n)x+(m-2n)y = 2 \\ (m+2n)x+y(m+2n+y) = 2+y^2 \end{cases}$

$\left[n=0 \wedge m \neq 0, \text{ indet.}; m=-2n, \text{ imp.}; n \neq 0 \wedge m \neq -2n, \left(\frac{2}{m+2n}; 0\right)\right]$

295 $\begin{cases} ax+by = a+b \\ x-y = \dfrac{b^2-a^2}{ab} \end{cases}$

$\left[a=0 \vee b=0, \text{ perde sign.}; a=-b \wedge a \neq 0, \text{ indet.}; a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq -b, \left(\frac{b}{a}; \frac{a}{b}\right)\right]$

TEST

296 È dato il sistema letterale

$$\begin{cases} 2ab(x-y) = 3(a+b) \\ 2ax - 4by = 3 \end{cases}$$

nelle incognite x e y.
Per quali valori di a e di b esso è determinato?

A $a = 0 \wedge \forall\, b \in \mathbb{R}$
B $b \neq 1 \wedge \forall\, a \in \mathbb{R}$
C $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq 2b$
D $a = 2b \wedge b \neq 0$
E $a = 2 \wedge b = 1$

297 Il sistema

$$\begin{cases} 4x - ky = -5 \\ 2x + 3y = -4 \end{cases}$$

è impossibile per:

A $k = 0$.
B $k = -6$.
C $k \neq -6$.
D $k = 6$.
E per alcun valore di k.

298 Quale affermazione sul sistema $\begin{cases} 5x + ky = 1 \\ 10x - 6y = h \end{cases}$ è *corretta*?

A È impossibile $\forall\, k \in \mathbb{R}$.
B È determinato $\forall\, h \in \mathbb{R}$.
C È impossibile per $k = 3$ e $h = 2$.
D È determinato per $k \neq 3$.
E È indeterminato per $k = -3$ e $h = 2$.

299 È dato il seguente sistema:

$$\begin{cases} (a+3)x + (3-2a)y = 4 \\ (a+3)x + (2a-3)y = 4 \end{cases}$$

Quale delle seguenti affermazioni è *falsa*?

A Se $a = -3$, il sistema è impossibile.
B Se $a \neq -\dfrac{3}{2}$, il sistema è determinato e ha soluzione $\left(\dfrac{4}{a+3}; 0\right)$.
C Se $a = \dfrac{3}{2}$, il sistema è indeterminato.
D Se $a \neq \dfrac{3}{2}$ e $a \neq -3$, il sistema è determinato e ha soluzione $\left(\dfrac{4}{a+3}; 0\right)$.
E Se $a = 1$, il sistema è determinato e ha soluzione $(1; 0)$.

300 Trova per quali valori di a il sistema letterale

$$\begin{cases} 6ax - 2y = a \\ (a+1)x - 3y = 2a \end{cases}$$

risulta determinato. Calcola poi il valore di a per cui ammette la soluzione $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{9}\right)$.

$\left[a \neq \dfrac{1}{8}; a = \dfrac{1}{9}\right]$

301 Trova per quali valori di a e b il sistema

$$\begin{cases} x - 4y = b \\ 5x + ay = 1 \end{cases}$$

è impossibile. Stabilisci se il sistema è determinato, indeterminato o impossibile per $a = -10$ e $b = \dfrac{1}{5}$.

$\left[a = -20 \wedge b \neq \dfrac{1}{5}; \text{determinato}\right]$

302 Calcola per quali valori di a e b il sistema

$$\begin{cases} 3ax + by = 6 \\ (a-1)x + 2y = 3 \end{cases}$$

è indeterminato. Stabilisci se il sistema è determinato, indeterminato o impossibile per $a = 2$ e $b = 12$.

[$a = -2 \wedge b = 4$; impossibile]

303 Detto S l'insieme delle soluzioni dell'equazione $10x + 4y = 1$ e S' l'insieme delle soluzioni dell'equazione $5x + ky - 3 = 0$, con $k \in \mathbb{R}$, determina per quale valore di k risulta $S \cap S' = \varnothing$ e per quale valore di k risulta:

$$S \cap S' = \left\{\left(0; \frac{1}{4}\right)\right\}.$$

[2; 12]

304 Considera l'insieme

$$A = \{(x;y) | [(m-2)x - my + 2 = 0] \wedge [mx + y = 2]\},$$

con $(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Determina per quali valori di $m \in \mathbb{R}$ tale insieme rappresenta:

a) una retta del piano cartesiano;
b) l'insieme vuoto;
c) un punto del piano cartesiano;
d) il punto $P(1; 2)$.

[a) $m = 1$; b) $m = -2$; c) $m \neq 1 \wedge m \neq -2$; d) $m = 0$]

I sistemi letterali fratti

ESERCIZIO GUIDA

305 Risolviamo il seguente sistema nelle incognite x e y al variare del parametro in $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \dfrac{x-y}{x+y} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{2}{bx+by} \\ \dfrac{3y}{bx} - 1 = \dfrac{2-3y}{x} - \dfrac{1}{b} \end{cases}$$

Osservando i denominatori delle frazioni dobbiamo porre le seguenti condizioni:

- sul parametro: $\boldsymbol{b \neq 0}$;
- sulle incognite: $x + y \neq 0 \rightarrow \boldsymbol{x \neq -y}$; $\boldsymbol{x \neq 0}$.

Se $b = 0$, il sistema perde significato.
Se $b \neq 0$, svolgiamo i calcoli per scrivere il sistema in forma normale:

$$\begin{cases} \dfrac{b(x-y)-(x+y)}{\cancel{b(x+y)}} = \dfrac{2}{\cancel{b(x+y)}} \\ \dfrac{3y-bx}{\cancel{bx}} = \dfrac{2b-3by-x}{\cancel{bx}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (b-1)x-(b+1)y = 2 \\ (1-b)x + 3(1+b)y = 2b \end{cases}$$

Discussione

$$D = \begin{vmatrix} b-1 & -(b+1) \\ 1-b & 3(1+b) \end{vmatrix} = 3b^2 - 3 + 1 - b^2 = 2b^2 - 2 = 2(b^2-1).$$

Se $b \neq \pm 1$, $D \neq 0$ e possiamo determinare la soluzione.

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & -(b+1) \\ 2b & 3(1+b) \end{vmatrix} = 6 + 6b + 2b^2 + 2b = 2b^2 + 8b + 6 = 2(b^2+4b+3) = 2(b+3)(b+1).$$

$$D_y = \begin{vmatrix} b-1 & 2 \\ 1-b & 2b \end{vmatrix} = 2b^2 - \cancel{2b} - 2 + \cancel{2b} = 2(b^2-1).$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\cancel{2}(b+3)\cancel{(b+1)}}{\cancel{2}\cancel{(b+1)}(b-1)} = \frac{b+3}{b-1}.$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{2(b^2-1)}{2(b^2-1)} = 1.$$

Confrontiamo la soluzione con le condizioni sulle incognite $x \neq -y$ e $x \neq 0$:

$$x \neq -y \rightarrow \frac{b+3}{b-1} \neq -1 \rightarrow b+3 \neq -b+1 \rightarrow 2b \neq -2 \rightarrow b \neq -1;$$

$$x \neq 0 \rightarrow \frac{b+3}{b-1} \neq 0 \rightarrow b \neq -3.$$

La soluzione $\left(\dfrac{b+3}{b-1}; 1\right)$ è quindi accettabile se $b \neq \pm 1 \wedge b \neq -3$.

Se $b = 1$, si ha $D = 0$, $D_x = 16$, $D_y = 0$, e il sistema è impossibile.
Se $b = -1$, si ha $D = 0$, $D_x = 0$, $D_y = 0$, e il sistema è indeterminato con $x \neq -y$ e $x \neq 0$.
In sintesi:
- se $b = 0$, il sistema perde significato;
- se $b \neq 0 \wedge b \neq \pm 1 \wedge b \neq -3$, il sistema è determinato, con soluzione $\left(\frac{b+3}{b-1}; 1\right)$;
- se $b = -3$, il sistema è impossibile perché la soluzione non è accettabile per le condizioni di esistenza;
- se $b = 1$, il sistema è impossibile;
- se $b = -1$, il sistema è indeterminato, con $x \neq -y$ e $x \neq 0$.

Risolvi e discuti i seguenti sistemi lineari letterali fratti nelle incognite x e y al variare del parametro in $\mathbb{R}$.

306 $\begin{cases} x + ay = 2a \\ \dfrac{1}{2a} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{3}{2x} \end{cases}$ $[a = 0, \text{ perde sign.}; a \neq 0, (a; 1)]$

307 $\begin{cases} x + y = \dfrac{3a+2}{6} \\ a + \dfrac{y}{ax} = \dfrac{2a+3}{6x} \end{cases}$ $\left[a = 0, \text{ perde sign.}; a = \pm 1, \text{ indet.}; a \neq \pm 1 \wedge a \neq 0, \left(\frac{1}{3}; \frac{a}{2}\right)\right]$

308 $\begin{cases} \dfrac{7b}{b-x} - b = \dfrac{5y}{b-x} \\ y - x = 2 \end{cases}$ $[b = 5, \text{ indet. con } x \neq 5; b \neq 5, (b-2; b)]$

309 $\begin{cases} (m+1)(m+2) = x + y \\ \dfrac{m-1}{x-y} - \dfrac{1}{m-2} = 0 \end{cases}$ $[m = 2, \text{ perde sign.}; m = 1, \text{ imp.}; m \neq 2 \wedge m \neq 1, (m^2+2; 3m)]$

310 $\begin{cases} \dfrac{b+2}{x} - \dfrac{1}{by} = 0 \\ \dfrac{y}{b+1} + y = b + 2 - \dfrac{x}{b+1} \end{cases}$

$[b = 0 \vee b = -1, \text{ perde sign.}; b = -2, \text{ indet. con } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0; b \neq 0 \wedge b \neq -1 \wedge b \neq -2, (b(b+2); 1)]$

311 $\begin{cases} \dfrac{x}{a+1} + \dfrac{y}{a} - 2 = 0 \\ \dfrac{x+y}{4(x-y)} = \dfrac{(x-1)(y+1)}{x^2-y^2} + \dfrac{x-y}{4x+4y} \end{cases}$

$\left[a = -1 \vee a = 0, \text{ perde sign.}; a = -\frac{1}{2}, \text{ indet.}; a \neq -1 \wedge a \neq 0 \wedge a \neq -\frac{1}{2}, (a+1; a)\right]$

312 $\begin{cases} \dfrac{x}{a+1} + \dfrac{y}{a-1} = 1 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{a}{xy} \end{cases}$ $\left[a = 1 \vee a = -1, \text{ perde sign.}; a \neq \pm 1, \left(\frac{a+1}{2}; \frac{a-1}{2}\right)\right]$

313 $\begin{cases} \dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{a(x+y)}=-\dfrac{2}{x^2-y^2} \\ x(a^2-1)+a^2y(a^2-1)+a^4=1 \end{cases}$ [$a=0$, perde sign.; $a=\pm 1$, indet. con $x \neq \pm y$; $a \neq 0 \wedge a \neq \pm 1$, imp.]

314 $\begin{cases} \dfrac{ax-2y}{a-2}+\dfrac{ay-2x}{2}=2a+4 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{2(a+2)}{xy} \end{cases}$ [$a=2$, perde sign.; $a=4 \vee a=-2$, indet. con $x \neq 0$ e $y \neq 0$; $a=0$, impossibile; $a \neq 4 \wedge a \neq \pm 2 \wedge a \neq 0$, $(2a; 4)$]

315 $\begin{cases} \dfrac{2(a-y)}{x}=1 \\ \dfrac{2(y-x)}{a^2-9}+\dfrac{2}{a-3}+\dfrac{x-4y}{(a-3)^2}=0 \end{cases}$

$\left[a=3 \vee a=-3, \text{ perde sign.}; a=-1, \text{ impossibile}; a \neq \pm 3 \wedge a \neq -1, \left(a+1; \dfrac{a-1}{2}\right)\right]$

316 $\begin{cases} \dfrac{a+2}{x+y}+\dfrac{4a^2-16}{x^2-y^2}=\dfrac{a-2}{x-y} \\ \dfrac{ax-2y}{a+2}+x=y \end{cases}$ [$a=-2$, perde sign.; $a=2$, indet. con $x \neq \pm y$; $a \neq \pm 2$, $(a+4; 2a+2)$]

8. I sistemi di tre equazioni in tre incognite

→ Teoria a pag. 716

RIFLETTI SULLA TEORIA

317 **VERO O FALSO?**

a) Il metodo del confronto può essere applicato anche ai sistemi lineari di tre equazioni in tre incognite. V F

b) Un sistema di tre equazioni in tre incognite può non essere lineare. V F

c) Un sistema lineare di tre equazioni in tre incognite è sempre determinato. V F

d) Nella risoluzione di un sistema lineare di tre equazioni in tre incognite è possibile utilizzare più di un metodo risolutivo. V F

e) Il sistema $\begin{cases} x-y=3 \\ y-z=1 \\ x-2z=0 \end{cases}$ ha soluzione $(5; 8; 4)$. V F

318 **TEST** Il sistema $\begin{cases} 3x+2y-5z=0 \\ x-y+z=-1 \\ x-2y+3z=0 \end{cases}$ ha soluzione:

A $(-2; -7; -4)$.
B $(2; 7; 4)$.
C $(1; 1; 1)$.
D $(-1; -2; -2)$.
E $(3; 6; 5)$.

319 Il sistema $\begin{cases} 3x+2y-4z=1 \\ 2x-3y-z=0 \\ 6x+4y-8z=2 \end{cases}$

ha una sola soluzione?
Perché? [no…]

320 Spiega che cosa significa affermare che $(1; 3; -2)$ è soluzione del sistema: $\begin{cases} 2x - y - 3z = 5 \\ x - 2y - z = -3 \\ 5x + y + 4z = 0 \end{cases}$

321 **TEST** Il sistema $\begin{cases} 4x - hy + 3z = 7 \\ kx - 2y + z = 5 \\ 3x + 2y + tz = 2 \end{cases}$ ha soluzione $(2; -1; 1)$ se:

A $h = 2, \quad k = -1, \quad t = 1.$
B $h = -4, \quad k = 1, \quad t = -2.$
C $h = 0, \quad k = 0, \quad t = 0.$
D $h = -4, \quad k = -1, \quad t = 6.$
E $h = -4, \quad k = 3, \quad t = -2.$

322 **TEST** Per quali valori reali dei parametri a, b, c, le terne $(1; -2; -2)$, $(1; 0; 0)$ e $(0; -1; 1)$ risultano soluzioni dell'equazione $ax + by + cz = 1$?

A $a = 1, \quad b = -\frac{1}{2}, \quad c = \frac{1}{2}.$
B $a = -1, \quad b = -\frac{1}{3}, \quad c = \frac{1}{2}.$
C $a = -\frac{1}{2}, \quad b = 3, \quad c = 0.$
D $a = 10, \quad b = 1, \quad c = -1.$
E $a = 1, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = -\frac{1}{2}.$

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

323 Risolvi il seguente sistema:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 4x + 2y - 3z = 5 \end{cases}$$

Osserviamo che si può applicare il metodo di *riduzione* alla prima e seconda equazione per eliminare z:

$$\ominus \begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$
$$\overline{2x - y = 0}$$

Sostituiamo la prima equazione del sistema con l'equazione equivalente appena calcolata.
Otteniamo:

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 4x + 2y - 3z = 5 \end{cases}$$

Ricaviamo y dalla prima equazione e procediamo per *sostituzione*:

$$\begin{cases} y = 2x \\ x - 2x + z = 0 \\ 4x + 4x - 3z = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ -x + z = 0 \\ 8x - 3z = 5 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo z e procediamo ancora per *sostituzione*:

$$\begin{cases} y = 2x \\ z = x \\ 8x - 3x = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ z = x \\ 5x = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ z = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

La soluzione del sistema è $(1; 2; 1)$.

Risolvi i seguenti sistemi. Quando necessario, discuti i sistemi al variare del parametro in $\mathbb{R}$.

324 $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y+z=2 \\ 4x+2y-z=5 \end{cases}$ $[(1; 1; 1)]$

325 $\begin{cases} 2x+y-3z=1 \\ x+y+4z=4 \\ x+2y=41 \end{cases}$ $[(-17; 29; -2)]$

326 $\begin{cases} x+y-z=6 \\ x+y=3 \\ x+z=0 \end{cases}$ $[(3; 0; -3)]$

327 $\begin{cases} 2x+3y-z=0 \\ x-y+z=1 \\ 3x+2y+4z=-3 \end{cases}$ $[(1; -1; -1)]$

328 $\begin{cases} y=x+2 \\ x-z=4 \\ y=z-1 \end{cases}$ [impossibile]

329 $\begin{cases} x=z+3 \\ y=x \\ y-z=3 \end{cases}$ [indeterminato]

330 $\begin{cases} x+z-1=0 \\ y+\dfrac{z}{2}+1=0 \\ 2x=-z \end{cases}$ $[(-1; -2; 2)]$

331 $\begin{cases} 3x-2y=1 \\ 2x+y-3z=2 \\ 4x=6z-2y+1 \end{cases}$ [impossibile]

332 $\begin{cases} x=\dfrac{13-3y}{2} \\ 3y=z+1 \\ 2x+4y+z=16 \end{cases}$ $[(5; 1; 2)]$

333 $\begin{cases} y+\dfrac{x-2z}{3}=2 \\ x-3y=2z-6 \\ \dfrac{z-y+2x}{3}=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$ $\left[\left(-1; 2; -\dfrac{1}{2}\right)\right]$

334 $\begin{cases} 2(x-y)+3(z+2)=24 \\ 5x-y=z+3 \\ 4(y+3x)+4=2z \end{cases}$ $[(1; -2; 4)]$

335 $\begin{cases} 3(z-x)=y+3(x-3) \\ 2(x+y)-3=z \\ 5x-4(y+z+1)=-4 \end{cases}$ $[(4; 0; 5)]$

336 $\begin{cases} 2(x-2y+z)=5x+1 \\ 3x-4y=1-4z \\ 5-3x+2y=2(y+z)+2 \end{cases}$ $[(-1; 2; 3)]$

337 $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 3x+4y+6z=3 \\ 10x+5y-3z=-4 \end{cases}$ $\left[\left(1; -2; \dfrac{4}{3}\right)\right]$

338 $\begin{cases} 3x+y+z=3 \\ 6x-2y+z=1 \\ 3x+3y+3z=7 \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{1}{3}; 1; 1\right)\right]$

339 $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 4x-5y+2z=-2 \\ 2x+3y-2z=3 \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{1}{2}; 1; \dfrac{1}{2}\right)\right]$

340 $\begin{cases} 3x-y=10-2z \\ 4z-y=17-6x \\ x-2z=-5-2y \end{cases}$ $\left[\left(2; -3; \dfrac{1}{2}\right)\right]$

341 $\begin{cases} -x+y-z=1 \\ 10x-5y+10z=-3 \\ 2x+y+z=2 \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{1}{5}; \dfrac{7}{5}; \dfrac{1}{5}\right)\right]$

342 $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{3}-\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+2}{3} \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{4}=\dfrac{2y-1}{4}+\dfrac{z}{2} \\ \dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{3}y-\dfrac{1}{6}z=1 \end{cases}$ $[(1; -2; 2)]$

343 $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{3}-\dfrac{y-2z}{2}=\dfrac{z-3}{3} \\ \dfrac{4x-y}{2}-\dfrac{1-z}{4}=\dfrac{4y-7z}{4} \\ \dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+2x}{2} \end{cases}$ [impossibile]

344 $\begin{cases} \dfrac{x-y}{2} - \dfrac{2z-1}{3} = 1 \\ \dfrac{6x-3}{4} - \dfrac{y+4z}{2} = \dfrac{4y+5}{4} \\ \dfrac{2x-3y}{2} = \dfrac{3z-1}{3} \end{cases}$ [indet.]

345 $\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 2 \\ \dfrac{x-2y}{2} + \dfrac{x+z}{3} + 1 = 0 \\ \dfrac{x+y+z}{2} + \dfrac{1}{2} = y \end{cases}$ $[(0; 1; 0)]$

346 $\begin{cases} 3(x+z) - 2(y-4) = -5 \\ x - 3y = 4(4+z) - 3 \\ z + 3 = 2y - x \end{cases}$ $[(-2; -1; -3)]$

347 $\begin{cases} -\dfrac{2}{3}(x+y) + 2(z+1) = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3}x + \dfrac{3}{2}z = y - 1 \\ 3(x-z) = x + y \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{3}{2}; 2; \dfrac{1}{3}\right)\right]$

348 $\begin{cases} \dfrac{2}{3}(x+y) = z - 1 \\ \dfrac{7}{4}(z-x) = \dfrac{1}{2}(y+1) + 1 \\ z + y = \dfrac{3}{2}x + 1 \end{cases}$ $\left[\left(1; \dfrac{1}{2}; 2\right)\right]$

349 $\begin{cases} \dfrac{4}{3}y - 2x = z - \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{3}{2}\left(x + z + \dfrac{2}{3}\right) = 3y \\ x = 2(y-z) \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{2}{3}; 1; \dfrac{2}{3}\right)\right]$

350 $\begin{cases} 2(x - 3y + 2z) = 5 - 5x \\ 7x - 3(x - y + 2) = z \\ 2(x + 3y) + 1 = 3(2y + z) \end{cases}$ $[(1; 1; 1)]$

351 $\begin{cases} x - 3ay + z = -a \\ 3x - ay - 5z = 5a \\ 2x + 3ay + 2z = 7a \end{cases}$ $[a = 0, \text{indet.}; a \neq 0, (2a; 1; 0)]$

352 $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ (a-1)x + (a+1)y + az = -2 \\ (a+1)x + (a-1)y + az = 2 \end{cases}$ [indet.]

353 $\begin{cases} ax - y + 3z = 4a \\ ax + y - 2z = a \\ 2ax - 3y - z = 0 \end{cases}$ $[a = 0, \text{indet.}; a \neq 0, (2; a; a)]$

354 $\begin{cases} x + 2ay - z = -2a \\ 3x - ay = 5z + 2a \\ x + ay = z \end{cases}$ $[a \neq 0, (5a; -2; 3a); a = 0, \text{indet.}]$

355 $\begin{cases} x - 3y + 5az = a \\ 2x - 6y = a - 10az \\ x + y = 4a \end{cases}$ $[a \neq 0, \text{impossibile}; a = 0, \text{indet.}]$

356 $\begin{cases} bx - ay + z = 0 \\ ax + by - z = a^2 + b^2 \\ bx + ay + z = 2ab \end{cases}$ $[a = 0, a = -b, \text{indet.}; a \neq 0 \wedge a \neq -b, (a; b; 0)]$

---

357 $\begin{cases} 2x - 3az = 5(a-y) \\ 2az - 2y = -5a - 3x \\ 5y + 2x = a(1 + 7z) \end{cases}$ $[a = 0, \text{indet.}; a \neq 0, (-a; 2a; 1)]$

358 $\begin{cases} bx - y = 4b \\ 2bx - 2b = (b-1)z - y \\ 4y + 6b = 3bz - bx \end{cases}$ $\left[b = 0, b = -\dfrac{5}{4}, \text{indet.}; b \neq 0 \wedge b \neq -\dfrac{5}{4}, (2; -2b; 0)\right]$

359 $\begin{cases} 3(a+1)x - 2y = 2a - z \\ 2ax + 4y - z = -2a \\ 3ax + 5y = a - \dfrac{z}{2} \end{cases}$ $\left[a = -\dfrac{7}{9}, \text{indet.}; a \neq -\dfrac{7}{9}, (0; 0; 2a)\right]$

360 $\begin{cases} ax + y = 0 \\ ax - y = (a+1)z + 2a \\ 2ax + 3y = 4az - a \end{cases}$ $\left[a = 0, a = -\dfrac{1}{9}, \text{indet.}; a \neq 0 \wedge a \neq -\dfrac{1}{9}, (1; -a; 0)\right]$

Sistemi lineari e problemi

ESERCIZI

Nel sito: ▶ 15 esercizi di recupero

361 **COMPLETA** la seguente tabella.

TESTO DEL PROBLEMA	EQUAZIONI CHE TRADUCONO IL PROBLEMA	SOLUZIONE
Un rettangolo ha l'altezza che è i … della … . Se l'altezza aumenta di 2 cm e la base diminuisce di 10 cm, il perimetro del rettangolo diventa uguale a 56 cm. Trova la base e l'altezza del rettangolo.	$y = \frac{5}{4}x$ …	
Determina tre numeri naturali tali che la loro …… sia 18, il secondo sia $\frac{3}{4}$ del primo e che la somma tra il secondo e il terzo sia … .	$x + y + z = 18$ … … $= 2$	
Trova due numeri tali che la …… tra il doppio del primo e il …… del secondo sia …, sapendo che il primo supera di … i $\frac{3}{2}$ del … .	$2x - 3y = 15$ $x = \frac{3}{2}y + 10$	

362 **TEST** Considera il seguente problema. «Determina due numeri x e y tali che la loro differenza sia uguale a 12 e che la metà del maggiore superi di 6 la metà del minore». Puoi affermare che il problema:

A ha soluzione $x = 12, y = 2$.
B non ammette soluzione.
C è indeterminato.
D ha $x = -2, y = 14$.
E ha soluzione $x = -14$.

363 **TEST** Un'urna contiene 300 palline di tre colori: rosso, blu e giallo. Le palline gialle sono 54, mentre il numero delle palline rosse supera di 26 il numero delle palline blu. Quante sono le palline blu?

A 111
B 136
C 137
D 110
E È impossibile determinarlo.

Problemi vari in due incognite

ESERCIZIO GUIDA

364 Hai a disposizione € 5,00 per acquistare penne e quaderni. Se compri 4 quaderni e 3 penne, ti mancano € 0,25; se compri 3 quaderni e 3 penne, ti avanzano € 0,65. Quanto costa un quaderno e quanto una penna?

1. **Richieste:**
   Costo di un quaderno
   Costo di una penna
2. **Incognite:**
   x = costo di un quaderno (in euro)
   y = costo di una penna (in euro)
3. **Relazioni:**
   Costo di 4 quaderni + costo di 3 penne = 5 + 0,25
   Costo di 3 quaderni + costo di 3 penne = 5 − 0,65
4. **Sistema risolvente:**
   $$\begin{cases} 4x + 3y = 5{,}25 \\ 3x + 3y = 4{,}35 \end{cases}$$
   Condizioni: $x > 0$, $y > 0$, perché rappresentano il prezzo di due oggetti.
5. **Risoluzione:**
   Poiché i coefficienti di y nelle due equazioni sono uguali, risulta semplice utilizzare il metodo di riduzione. Sottraiamo membro a membro:
   $$-\begin{cases} 4x + 3y = 5{,}25 \\ 3x + 3y = 4{,}35 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4 \cdot 0{,}9 + 3y = 5{,}25 \\ x = 0{,}9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3y = 5{,}25 - 3{,}6 = 1{,}65 \\ x = 0{,}9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0{,}55 \\ x = 0{,}9 \end{cases}$$
   $$x \qquad = 0{,}9$$
   La soluzione del sistema è (0,9; 0,55).
   Controllo: La soluzione è accettabile perché entrambi i valori sono numeri positivi.
6. **Risposta:** Un quaderno costa € 0,90, una penna costa € 0,55.

365 Un automobilista percorre 615 km in due giorni. Sapendo che il tragitto del primo giorno è doppio di quello del secondo giorno, trova quanti km ha percorso ogni giorno. [410 km; 205 km]

366 Una scatola contiene forchette a 2 e a 3 punte. Sapendo che le forchette in totale sono 22 e che le punte in totale sono 54, calcola quante sono le forchette a 2 punte e quante quelle a 3. [12; 10]

367 Lucia e Elena sono sorelle. La somma delle loro età è 31 e Lucia è nata tre anni prima di Elena. Quanti anni ha ciascuna? [17; 14]

368 Possiedo € 30,00. Con questo denaro acquisto alcune magliette da € 6,50 ciascuna e alcuni calzini da € 3,50 al paio. Sapendo che il numero di magliette coincide col numero di paia di calzini, calcola quante sono. [3]

369 Carlo e Laura possiedono due somme di denaro. Complessivamente potrebbero acquistare 6 confezioni di caramelle da € 0,35 ciascuna. Se Carlo regala € 0,20 a Laura, giungono ad avere la stessa somma di denaro. Quanto possiede Carlo e quanto Laura? [€ 1,25; € 0,85]

370 Un fruttivendolo compera una cesta di mele a € 0,45 al kg e un sacco di patate a € 0,10 al kg, spendendo in tutto € 6,40. Trova il peso delle mele e quello delle patate, sapendo che la cesta di mele costa il quintuplo del sacco di patate, più € 0,40. [12 kg; 10 kg]

371 Il proprietario di un ristorante ha comperato 300 bottiglie di vino e 50 di liquore, spendendo € 450,00. Ora compera 600 bottiglie della stessa qualità di vino e 120 bottiglie di liquore, spendendo € 960,00. Trova il costo di una bottiglia di vino e il costo di una bottiglia di liquore. [€ 1; € 3]

372 10 sacchi di frumento e 8 di mais pesano 1646 kg; 30 sacchi di frumento e 12 di mais, rispettivamente uguali ai precedenti, pesano 3894 kg. Quanto pesa ciascun sacco di frumento e ciascun sacco di mais? [95 kg; 87 kg]

373 Un bibliotecario vuole disporre in ordine dei libri di storia sugli scaffali di una libreria. Se mette 8 libri su ogni scaffale, ne rimane vuoto uno; se invece mette 6 libri su ogni scaffale, riempie la libreria ma gli restano fuori 2 libri. Quanti libri deve sistemare il bibliotecario? [32]

374 In un numero di due cifre la differenza tra la cifra delle decine e quella delle unità è 4. Dividendo la cifra delle decine aumentata di 3 per la cifra delle unità, si ottiene per quoziente 4 e resto 1. Trova il numero. [62]

375 Determina due numeri naturali, sapendo che la loro somma divisa per la loro differenza dà per quoziente 3 e resto 4 e che la somma di $\frac{1}{6}$ del maggiore e di $\frac{2}{5}$ del minore vale 7. [18; 10]

376 Sommando ai $\frac{5}{6}$ della somma di due numeri i $\frac{3}{4}$ della loro differenza, si ottiene 37. Sapendo che sommando i $\frac{3}{7}$ del minore al maggiore si ottiene 26, determina i due numeri naturali. [7; 23]

377 Il rapporto tra la differenza di due numeri e la somma aumentata di 6 è $\frac{1}{3}$. Aggiungendo 3 al numero minore e togliendo 6 al maggiore, si ottiene lo stesso risultato. Determina i due numeri. [6; 15]

378 Due numeri naturali sono rispettivamente proporzionali ai numeri 3 e 5 secondo uno stesso fattore di proporzionalità. Aggiungendo 2 al minore e togliendo 5 al maggiore, si ottengono due numeri il cui rapporto è $\frac{7}{10}$. Trova i due numeri. [33; 55]

379 La differenza delle età di due fratelli vale la metà dell'età del minore, la loro somma vale i $\frac{5}{3}$ dell'età del maggiore. Determina le due età. [indeterminato]

380 In un numero di due cifre la cifra delle decine è doppia di quella delle unità. Scambiando le due cifre si ottiene un nuovo numero che è minore del primo di 36. Determina il numero di partenza. (Suggerimento. Se x è la cifra delle decine e y quella delle unità, il numero è $10 \cdot x + y$.) [84]

381 Determina una frazione, sapendo che la cifra al denominatore è il doppio della cifra al numeratore aumentato di 1 e che, diminuendo di 1 la cifra al numeratore e aumentando di 1 quella al denominatore, si ottiene la frazione $\frac{1}{3}$. $\left[\frac{5}{11}\right]$

382 In un negozio di alimentari vi sono 23 confezioni di cioccolatini. Alcune contengono 3 cioccolatini e altre 10. Sapendo che complessivamente le confezioni contengono 111 cioccolatini, calcola quante sono le confezioni da 3 cioccolatini e quante quelle da 10. [17; 6]

383 In una prima elementare sono iscritti 18 alunni. Sapendo che alcuni di questi hanno 5 anni e altri 6, e che l'età complessiva degli iscritti è di 100 anni, calcola quanti sono i bambini di 5 anni e quanti di 6. [8; 10]

384 Un'agenzia immobiliare vende per conto di un cliente due appartamenti per complessivi € 400 000. A quanto è stato venduto ciascuno dei due appartamenti sapendo che per il primo sono stati spesi in più i $\frac{2}{9}$ del prezzo del secondo? [€ 220 000, € 180 000]

385 In un numero di due cifre la somma delle cifre è 11. Dividendo il numero per la cifra delle decine, si ottiene per quoziente 14 e resto 1. Trova il numero. [29]

386 L'età di una madre supera di 5 il quintuplo dell'età del figlio. Tra 7 anni l'età della madre sommata a quella del figlio darà per risultato 55. Trova le due età. [35; 6]

387 In una fabbrica ci sono 2 macchine, la prima produce 10 pezzi all'ora, la seconda 7 pezzi all'ora. Le due macchine hanno prodotto in tutto 191 pezzi, lavorando complessivamente 23 ore. Determina il numero dei pezzi prodotti dall'una e dall'altra macchina. [100; 91]

388 Due serbatoi hanno capacità rispettivamente proporzionali a 7 e 4. Il serbatoio maggiore contiene tanto liquido quanto quello minore più i $\frac{3}{4}$ di quest'ultimo. Determina le capacità. [indeterminato]

389 In un parcheggio ci sono 20 tra automobili e camion. Sapendo che i camion hanno 6 ruote, invece di 4 come le automobili, e che ci sono complessivamente 86 ruote, calcola quante sono le automobili e quanti i camion. [17; 3]

390 Trova due numeri sapendo che dividendo il doppio del maggiore per il minore si ottiene per quoziente 2 e resto 10 e aumentando il maggiore di 11 si ottiene il doppio del minore. [16; 21]

391 Determina due numeri naturali, sapendo che, dividendo il primo per il secondo, si ottiene 3 per quoziente e 1 per resto e che il primo diminuito di 1 è 3 volte il secondo. (Suggerimento. Se dividiamo a per b con quoziente q e resto r, otteniamo $a = bq + r$.) [indeterminato]

392 Angela investe un capitale di € 40 000 in banca, in parte al tasso annuo d'interesse al 5% e il rimanente al 3%. Se dopo un anno il guadagno della prima quota supera di € 300 quello della seconda, a quanto ammontava ciascuna delle due quote investite? Quali sono i due guadagni? [€ 18 750, € 21 250; € 937,50, € 637,50]

Problemi di geometria in due incognite

ESERCIZIO GUIDA

393 Un rettangolo ha il perimetro di 48 cm. Sapendo che il doppio dell'altezza è i $\frac{2}{3}$ della base, quali sono le lunghezze della base e dell'altezza?

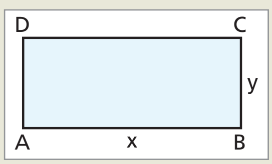
1. Richieste:
Lunghezza di AB (in cm)
Lunghezza di BC (in cm)

2. Incognite:
$x = \overline{AB} \quad y = \overline{BC}$

Condizioni:
$x > 0, y > 0$, poiché sono misure di lunghezza.

3. Relazioni e dati:
Perimetro $= 48$ cm

$2 \cdot \overline{BC} = \frac{2}{3} \cdot \overline{AB}$



4. Sistema risolvente:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 48 \\ 2y = \frac{2}{3}x \end{cases}$$

5. Risoluzione:

$$\begin{matrix} :2 \\ :2 \end{matrix}\begin{cases} x + y = 24 \\ y = \frac{1}{3}x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{3}x = 24 \\ y = \frac{1}{3}x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{4}{3}x = 24 \\ y = \frac{1}{3}x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 24 \cdot \frac{3}{4} = 18 \\ y = \frac{1}{3} \cdot 18 = 6 \end{cases}$$

La soluzione del sistema è (18; 6).

Controllo: La soluzione è accettabile poiché 18 e 6 sono entrambi positivi.

6. Risposta: Il rettangolo ha la base di 18 cm e l'altezza di 6 cm.

BRAVI SI DIVENTA ▶ E33

394 In un trapezio isoscele che ha il perimetro uguale a 128 cm, il rapporto tra la base maggiore e la base minore è $\frac{9}{4}$. Trova l'area del trapezio sapendo che i $\frac{7}{5}$ del lato obliquo superano di 19 cm i $\frac{2}{3}$ della base minore.

395 Calcola la lunghezza di due segmenti, sapendo che la loro somma è 19 m e la loro differenza è 5 m. [12 m; 7 m]

396 In un rettangolo il perimetro è 80 cm. La base supera l'altezza di 10 cm. Trova le dimensioni del rettangolo. [25 cm; 15 cm]

397 Calcola l'area e il perimetro di un rettangolo, sapendo che le due dimensioni sono tali che la loro somma è 10 cm e che, aggiungendo 1 cm alla minore e togliendo 1 cm dalla maggiore, si ottiene un quadrato. [24 cm^2; 20 cm]

398 Calcola l'area di un rombo, sapendo che il rapporto tra le diagonali è $\frac{5}{2}$ e che la differenza fra la maggiore e il doppio della minore vale la metà della minore. [indeterminato]

399 Calcola la lunghezza delle diagonali di un rombo, sapendo che la somma di $\frac{1}{10}$ della maggiore e $\frac{1}{9}$ della minore è 19 m e che, diminuendo la maggiore di 10 m e aumentando di 9 m la minore, le due diagonali diventano congruenti. [100 m; 81 m]

400 Calcola i raggi di due circonferenze concentriche, sapendo che la loro differenza è 4 cm e che il raggio minore è la metà di quello maggiore aumentata di 1 cm. [6 cm; 10 cm]

401 Calcola l'ampiezza dei due angoli acuti di un triangolo rettangolo, sapendo che la somma del minore e dei $\frac{3}{7}$ del maggiore vale i $\frac{5}{2}$ del minore. [70°; 20°]

402 Determina le ampiezze di due angoli supplementari, sapendo che essi diventano congruenti sottraendo 20° al maggiore e sommando 20° al minore. [110°; 70°]

403 Calcola la lunghezza della diagonale di un rettangolo, sapendo che il perimetro è 14 m e che l'altezza supera la base di 1 m. [5 m]

404 Calcola le lunghezze delle basi di un trapezio, sapendo che l'area è 32 cm^2, l'altezza è 4 cm e la differenza delle basi è 4 cm. [10 cm; 6 cm]

405 Calcola l'area di un trapezio isoscele, sapendo che le basi differiscono di 6 m, che la base maggiore è uguale al doppio della minore diminuito di 3 m e che il lato obliquo è 5 m. [48 m^2]

406 Calcola le lunghezze dei lati di un parallelogramma, sapendo che il perimetro vale $34k$ e che il maggiore è uguale al doppio del minore più $2k$. [$12k$; $5k$]

407 Calcola l'area di un triangolo isoscele, sapendo che il perimetro è $16a$ e che il doppio del lato obliquo è uguale alla base aumentata dei suoi $\frac{2}{3}$. [$12a^2$]

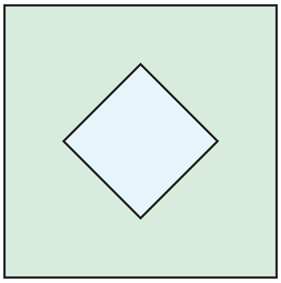
408 In un trapezio rettangolo, la differenza tra le basi vale $12k$. La base maggiore è uguale agli $\frac{8}{5}$ della base minore. Sapendo che l'altezza è $5k$, calcola area e perimetro. [$130k^2$; $70k$]

409 Calcola il perimetro di un rombo, sapendo che le sue diagonali differiscono di $2a$ e che la loro semisomma è il doppio della minore diminuito di $5a$. [$20a$]

410 Calcola l'area di un rettangolo, sapendo che il perimetro è 26 cm e che, se si tolgono 2 cm alla dimensione maggiore e si aggiungono 3 cm alla dimensione minore, quest'ultima diventa superiore di 4 cm rispetto all'altra. [42 cm^2]

411 Due circonferenze sono tangenti. La distanza tra i centri vale il doppio del raggio minore più 2 cm. Il raggio maggiore, sommato ai $\frac{4}{3}$ del raggio minore, vale 9 cm. Calcola le aree dei due cerchi. [9π cm^2; 25π cm^2]

412 Calcola le lunghezze dei lati di un rettangolo, sapendo che il maggiore supera di 4 cm il minore e che, aumentando di 2 cm il maggiore e diminuendo di 1 cm il minore, l'area diminuisce di 2 cm^2. [8 cm; 4 cm]

413 

In una città si è costruita una aiuola quadrata tenuta a prato con al centro una fontana, anch'essa quadrata, disposta come in figura.
Per i contorni, sia interno sia esterno, sono stati usati 176 m di bordo in marmo. Per il contorno esterno però sono serviti 112 m in più che per il contorno interno. Quanto è grande l'aiuola? Quanti m^2 sono rimasti per il prato? [1296 m^2; 1232 m^2]

414 In un rettangolo la base supera di $3a$ il doppio dell'altezza. Costruisci esternamente al rettangolo quattro triangoli isosceli, aventi per basi i lati del rettangolo e le altezze, relative a essi, di lunghezza $8a$. Sapendo che l'area dell'ottagono così ottenuto supera di $168a^2$ l'area del rettangolo dato, determina il perimetro del rettangolo e dell'ottagono. [$42a$; $\simeq 78a$]

Problemi in tre incognite

415 Cinque ragazze fanno colazione al bar prendendo: 2 caffè, 3 bicchieri di latte, 4 paste. Alla richiesta del conto il barista Lorenzo, con fare scherzoso, risponde: «Un caffè e un bicchiere di latte fanno € 1,90, un bicchiere di latte e una pasta fanno € 1,95, un caffè e una pasta fanno € 1,85. Quanto mi dovete?». [€ 8,60]

416 In un triangolo ABC, un terzo dell'ampiezza dell'angolo $\hat{A}$ supera di 5° l'ampiezza dell'angolo $\hat{B}$. Determina le ampiezze dei tre angoli, sapendo che $\hat{C}$ è i $\frac{3}{2}$ di $\hat{B}$. [105°; 30°; 45°]

417 La settimana scorsa ho comprato 3 litri di latte e 2 pacchi di biscotti, spendendo € 8,10. Qualche giorno fa ho comprato 2 litri di latte e 6 uova sfuse e ho speso € 4,80. Oggi, comprando un pacco di biscotti e 12 uova sfuse, ho speso € 5,40. Trova il prezzo di ciascun prodotto. [€ 1,50; € 1,80; € 0,30]

418 Fabrizio è 20 cm più alto di Aldo e 13 cm più di Antonio. La media delle altezze di Fabrizio, Aldo, Antonio è 174 cm. Determina le altezze dei tre. [185 cm; 165 cm; 172 cm]

419 Tre numeri naturali hanno somma 78. Il primo diviso per il secondo dà quoziente 3 e resto 11, diviso per il terzo dà quoziente 2 e resto 9. Trova i tre numeri. [47; 12; 19]

420 La media delle età di Giorgio, Luigi, Marco è 20. L'età di Giorgio sta all'età di Luigi come 2 sta a 1. Dividendo l'età di Marco per l'età di Luigi, si ottiene per quoziente 1 e per resto 8. Determina l'età dei tre. [26; 13; 21]

421 Tre numeri naturali sono tali che il secondo è la somma degli altri due aumentata di 7. La differenza tra il secondo e il primo è tre volte la metà del terzo, mentre la differenza tra il terzo e il doppio del primo è i $\frac{2}{13}$ del secondo. Trova i tre numeri. [5; 26; 14]

422 In un trapezio isoscele, la base maggiore è inferiore di 1 cm al doppio della base minore, che è i $\frac{3}{4}$ del lato obliquo. Sapendo che il perimetro è 16 cm, determina le lunghezze dei lati. [4 cm (lato obliquo); 3 cm (base minore); 5 cm (base maggiore)]

423 Due triangoli isosceli hanno egual base. Il perimetro del primo è 19 cm, quello del secondo 11 cm; inoltre, la differenza tra uno dei lati congruenti e la base del primo triangolo è pari alla misura di uno dei lati congruenti del secondo diminuito di 1 cm. Determina le lunghezze dei lati dei due triangoli. [5 cm; 7 cm; 3 cm]

424 In un triangolo la lunghezza dei $\frac{3}{4}$ di un lato è uguale a quella di un altro lato aumentata di 1 cm; il terzo lato è la semisomma dei primi due, mentre il perimetro del triangolo è 9 cm. Determina la lunghezza dei tre lati. [4 cm; 2 cm; 3 cm]

425 In un parallelepipedo i perimetri dei rettangoli individuati da ciascuna faccia sono rispettivamente 26 cm, 24 cm, 18 cm. Determina il volume del parallelepipedo. [160 cm^3]

426 Un quadrilatero avente due lati congruenti tra loro ha il perimetro uguale a 13 cm. Tali lati insieme sono lunghi come un terzo lato, il quale è 1 cm in meno del quarto lato. Trova la lunghezza dei quattro lati del poligono. [2 cm; 2 cm; 4 cm; 5 cm]

427 La somma delle diagonali di un rombo è pari alla lunghezza del perimetro di un quadrato; la diagonale minore ha la lunghezza del lato del quadrato aumentata di 1 cm, mentre la diagonale maggiore è lunga quanto la somma della diagonale minore e del lato del quadrato. Determina la lunghezza delle due diagonali del rombo e del lato del quadrato. [5 cm; 3 cm; 2 cm]

428 In un trapezio rettangolo, la base maggiore supera la minore di 2 cm. Il rettangolo avente come lati la base minore e l'altezza del trapezio avrebbe perimetro 14 cm, mentre il triangolo avente come lati le basi e l'altezza del trapezio avrebbe perimetro 12 cm. Determina l'area del trapezio. [16 cm^2]

429 Per coprire una spesa di € 30,00 Anna, Giorgio e Giuseppe decidono quanto segue: Anna pagherà $\frac{1}{5}$ della somma pagata complessivamente da Giorgio e Giuseppe, Giorgio pagherà i $\frac{3}{7}$ della somma pagata da Giuseppe. Determina l'importo pagato dai tre. [€ 5,00; € 7,50; € 17,50]

430 Due lati di un triangolo stanno tra loro come 3 sta a 4, il terzo lato è pari alla loro somma diminuita di 2 cm, mentre il perimetro è 26 cm. Trova i tre lati del triangolo. [6 cm; 8 cm; 12 cm]

431 In un triangolo un angolo è doppio di un altro ed è 5° in meno del terzo. Determina le ampiezze degli angoli del triangolo. [70°; 35°; 75°]

432 Tre angoli hanno come somma l'angolo giro. Un quarto di uno è pari a un terzo di un altro e a un mezzo del terzo. Determina le ampiezze dei tre angoli. [160°; 120°; 80°]

433 Il perimetro di un triangolo isoscele è uguale a quello di un rombo il cui perimetro è i $\frac{4}{3}$ della somma dei due lati congruenti del triangolo. La somma dei due perimetri è 32 cm. Determina le lunghezze dei lati dei due poligoni. [4 cm; 6 cm; 4 cm]

434 In un quadrilatero un lato è rispettivamente il doppio, i $\frac{4}{3}$ e i $\frac{2}{3}$ degli altri tre lati. Il perimetro del quadrilatero è 15 cm. Determina le lunghezze dei lati del poligono. [4 cm; 2 cm; 3 cm; 6 cm]

435 Due triangoli isosceli hanno la stessa base. Il perimetro del primo è 11 cm, quello del secondo è 7 cm, mentre quello del quadrilatero individuato dai due lati congruenti di ciascun triangolo è 12 cm. Determina le lunghezze dei lati dei due triangoli. [3 cm; 4 cm; 2 cm]

436 Tre metri di stoffa rossa e due di stoffa blu sono costati a Silvia € 42,50. Essendo avanzati due metri di stoffa rossa, Silvia è tornata al negozio per restituirli e, per cinque metri di stoffa verde, ha dovuto pagare ancora € 15. È tornata infine per un altro metro di stoffa blu e due metri di stoffa verde, pagando € 22. Determina il costo delle tre stoffe al metro. [€ 7,50; € 10; € 6]

437 Sara è andata in pasticceria e ha comprato 10 paste, 6 cioccolatini e 15 caramelle; ha speso € 9,00. Se avesse comprato 5 paste in meno, avrebbe speso € 6,00. Un suo amico, che ha comprato 5 paste e 10 cioccolatini, ha speso € 5,50. Determina il prezzo unitario di paste, cioccolatini e caramelle. [€ 0,60; € 0,25; € 0,10]

438 Tre chiodi di 6 cm, 9 cm e 7 cm vengono piantati alla parete. La somma delle porzioni conficcate è 17 cm e le porzioni esterne sono uguali per i primi due, un centimetro in meno per il terzo. Calcola di quanto affonda ciascun chiodo nel muro. [4 cm; 7 cm; 6 cm]

439 In un cortile si contano, tra gatti, cani e galline, 17 teste e 54 zampe. Il numero dei gatti supera di 2 quello dei cani. Determina quanti sono gli animali di ciascun tipo. [6; 4; 7]

440 Le case di tre amiche si trovano sui vertici di un triangolo. Anna va a trovare Carla, passando da Barbara, e percorre in tutto 3 km. Se Carla va a trovare Barbara e torna a casa, dopo essere passata da Anna, percorre 5,5 km. Quando Barbara va da Carla, dopo essere stata a prendere Anna, percorre 4 km. Calcola le distanze tra le case delle tre amiche. [1,5 km; 1,5 km; 2,5 km]

441 La somma delle cifre di un numero di 3 cifre è 12. La somma della cifra delle decine e di quella delle centinaia è doppia della cifra delle unità. Diminuendo di 3 la cifra delle decine e aumentando di 3 la cifra delle unità, si ottiene un numero dove, rispetto al numero iniziale, risultano scambiate decine e unità. Determina il numero. [174]

442 Il perimetro di un triangolo isoscele è pari al perimetro di un quadrato aumentato di 1 m. La base del triangolo è lunga quanto il lato del quadrato, mentre la somma dei due lati congruenti è pari al quadruplo della base diminuito di 4 m. Trova le lunghezze dei lati dei due poligoni. [5 m; 5 m; 8 m]

Problemi vari

Risolvi i sistemi.

443 $\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} + 10 = 0 \\ \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{y} = 6 \end{cases}$ $\left[\left(-1; -\dfrac{1}{8}\right)\right]$

(Suggerimento. Poni $\dfrac{1}{x} = t$, $\dfrac{1}{y} = v$ e risolvi il sistema nelle incognite t e v.)

444 $\begin{cases} \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{y} = 11 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} = 4 \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{1}{3}; 2\right)\right]$

445 $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{y} - \dfrac{2}{z} = -8 \\ \dfrac{2}{y} - \dfrac{1}{z} = \dfrac{5}{2} - \dfrac{1}{x} \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{2}{z} = 1 \end{cases}$ $\left[\left(-1; \dfrac{1}{2}; 2\right)\right]$

Risolvi i seguenti sistemi di secondo grado. (Suggerimento. Utilizza la legge di annullamento del prodotto e ottieni due sistemi.)

446 $\begin{cases} (x+y)(2x-4y+1) = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$ $\left[(1; -1), \left(\dfrac{9}{2}; \dfrac{5}{2}\right)\right]$

447 $\begin{cases} 2x(x-3y) + x = 0 \\ 4x - y = -2 \end{cases}$ $\left[(0; 2), \left(-\dfrac{1}{2}; 0\right)\right]$

448 $\begin{cases} (x-1)(4-y) = x^2 - 1 \\ x - y + 5 = 0 \end{cases}$ $[(1; 6), (-1; 4)]$

449 Considera un sistema lineare con tre equazioni in due incognite. Aiutandoti con una rappresentazione grafica dei vari casi possibili, individua il numero di soluzioni che tale sistema può avere. In quale dei casi che hai determinato rientra il sistema $\begin{cases} 5x - 3y = 12 \\ x + y = 4 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$? [impossibile]

450 $A(2; -1)$ e $B(4; 3)$ sono punti di una retta di equazione $y = mx + q$. Trova m e q. $[2; -5]$

451 Il polinomio $ax^3 + bx + 2$ ha come zeri i valori $x = -1$ e $x = 2$. Trova a e b. $[-1; 3]$

452 Il polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 - 2x + b$ è divisibile per $(x+1)$ e per $(x-2)$. Trova a e b. $[-1; 0]$

453 Se il sistema $\begin{cases} 2ax + by = 4 \\ -bx + 3ay = -26 \end{cases}$ ha come soluzione $x = -2$, $y = 4$, quali sono i valori di a e b? $[-2; -1]$

454 Per quali valori reali di h e k il polinomio $P(x) = hx^2 + kx - 3x + 1$ si annulla per $x = 1$ e per $x = 2$? $\left[h = \dfrac{1}{2}, k = \dfrac{3}{2}\right]$

455 Trova per quali valori di a e b i due polinomi $A(x) = (a+b)x^2 + 2bx + 2$ e $B(x) = 3ax^2 + (a+6)x + 2$ sono identici. [2; 4]

456 È possibile trovare due numeri A e B tali che sia vera l'uguaglianza $\frac{3}{(x-3)(2x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{2x+1}$?
Spiega la tua risposta. (Suggerimento. Ricorda il principio di identità dei polinomi.)
$\left[\text{sì; } A = \frac{3}{7}, B = -\frac{6}{7}\right]$

457 È possibile trovare due numeri A e B tali che sia vera l'uguaglianza $\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x^2+1}$?
Spiega la tua risposta.
[impossibile]

458 Considera la frazione algebrica $\frac{-5x+2}{x^3+x^2-2x}$. Determina per quali valori di a, b, $c \in \mathbb{R}$ può essere scritta come la somma di frazioni algebriche $\frac{a}{x} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x-1}$.
$[a = -1; b = 2; c = -1]$

459 Data l'equazione lineare $ax + 2by - cz = 2$ nelle variabili x, y e z, determina a, b, $c \in \mathbb{R}$ tali che l'equazione data ammetta come soluzioni $\left(1; \frac{1}{2}; 1\right)$, $(4; -1; 0)$ e $\left(3; 0; \frac{1}{3}\right)$. Scrivi poi l'equazione così trovata.
$\left[a = \frac{1}{2}, b = 0, c = -\frac{3}{2}; x + 3z - 4 = 0\right]$

460 Un giovane imprenditore vuole iniziare una nuova attività. Una legge per l'imprenditoria giovanile gli consente di scegliere fra due diversi regimi fiscali: nel primo caso le tasse sono pagate a percentuale fissa, pari al 25% dei guadagni, e nel secondo caso le tasse sono pagate a fasce di reddito, cioè sui primi 20 000 euro di guadagno deve pagare il 10%, sulla parte eccedente deve pagare il 35%.
Rappresenta graficamente la situazione e stabilisci qual è il regime più conveniente a seconda delle previsioni di guadagno.
[fino a un guadagno di € 50 000 conviene il secondo regime fiscale]

461 Un gestore di telefonia mobile A offre ai propri clienti la tariffa di € 0,10 per ogni minuto di conversazione, con in più lo scatto alla risposta che addebita € 0,10 all'inizio della conversazione. Il secondo gestore B offre invece la tariffa di € 0,01 ogni 4 secondi di conversazione, senza scatti alla risposta. Rappresenta la situazione in un grafico cartesiano e stabilisci, sulla base di esso, quale delle due tariffe è la più conveniente in relazione all'uso che si intende fare del telefonino.
[fino a 120 secondi conviene il gestore B]

462 Due pompe riforniscono di acqua una piscina o ne aspirano l'acqua. La prima pompa immette acqua per 2 ore, la seconda per 5 ore, e in tal modo l'acqua cresce di 720 litri. La prima pompa aspira acqua per 1 ora, la seconda per 3 ore, così che l'acqua diminuisce di 430 litri. Calcola la portata oraria di ciascuna pompa. Determina le soluzioni del sistema risolvente sia graficamente sia con il metodo di riduzione.
[10 l/h; 140 l/h]

463 È dato il sistema lineare $\begin{cases}(a+1)x - ay = 3\\(2a-1)x + 3(2a-1)y = 2\end{cases}$

Determina per quali valori del parametro a il sistema lineare rappresenta:

a) l'insieme vuoto;

b) un punto del piano cartesiano;

c) una retta nel piano cartesiano.

$\left[\text{a) } a = \frac{1}{2} \vee a = -\frac{3}{4}; \text{ b) } a \neq \frac{1}{2} \wedge a \neq -\frac{3}{4}; \text{ c) } \nexists\, a \in \mathbb{R}\right]$

LABORATORIO DI MATEMATICA

I sistemi lineari con Derive

ESERCITAZIONE GUIDATA

Troviamo le coordinate del punto Q, sapendo che appartiene all'asse y e che è equidistante dai punti R e P. Il punto R ha coordinate $(5; 0)$ e il punto P è l'intersezione fra le rette u di equazione $y = \frac{1}{2}x + \frac{15}{2}$ e v di equazione $y = -\frac{3}{2}x + \frac{19}{2}$. Tracciamo il grafico dei dati e dei risultati.

Per risolvere il problema svolgiamo i seguenti passi:
- troviamo le coordinate del punto P;
- scriviamo $\overline{QP}$ e $\overline{QR}$ in funzione dell'ordinata di Q, sapendo che l'ascissa di Q vale 0;
- determiniamo l'ordinata di Q.

- Entriamo in ambiente Derive.
- Risolviamo il sistema delle equazioni delle rette u e v.
- Immettiamo la formula della distanza fra due punti.
- Con *Semplifica_Sostituisci variabili*, applicato alla formula precedente, ricaviamo $\overline{QR}$ in funzione dell'ordinata di Q.
- Operiamo in modo simile per $\overline{QP}$.
- Con *Risolvi_Espressione* risolviamo l'equazione $\overline{QR}^2 = \overline{QP}^2$, trovando l'ordinata di Q.
- Dopo aver immesso le coordinate, ora note, dei punti P, Q e R attraverso la matrice `[1, 8; 0, 5/2; 5,0]`, con gli strumenti di Derive tracciamo i grafici dei dati e dei risultati.

#1: $y = -\frac{3}{2}\cdot x + \frac{19}{2}$

#2: $y = \frac{x}{2} + \frac{15}{2}$

#3: $\text{SOLVE}\left(\left[y = -\frac{3}{2}\cdot x + \frac{19}{2},\ y = \frac{x}{2} + \frac{15}{2}\right], [x, y]\right)$

#4: $[x = 1 \wedge y = 8]$

#5: $d = \sqrt{((x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2)}$

#6: $d = \sqrt{(yq^2 + 25)}$

#7: $d = \sqrt{(yq^2 - 16\cdot yq + 65)}$

#8: $\sqrt{(yq^2 + 25)} = \sqrt{(yq^2 - 16\cdot yq + 65)}$

#9: $\text{SOLVE}(\sqrt{(yq^2 + 25)} = \sqrt{(yq^2 - 16\cdot yq + 65)}, yq)$

#10: $yq = \frac{5}{2}$

▲ **Figura 1**

Nel sito: ▶ **1 esercitazione guidata con Derive** ▶ **14 esercitazioni in più**

Esercitazioni

Risolvi i seguenti problemi in modo analogo a quello dell'esercitazione guidata.

1 Trova la distanza fra i punti P e Q, sapendo che P è l'intersezione con l'asse x della retta r di equazione $y = 2x - 4$ e Q è l'intersezione fra le rette s e t rispettivamente di equazione $y = 3x - 7$ e $y = -\frac{1}{2}x$. $[\overline{PQ} = 1]$

2 Determina le coordinate del punto medio M del segmento AB, sapendo che A ha coordinate $(4; -1)$ e B è l'intersezione fra la retta r, passante per $P(3; 3)$ e parallela alla retta p di equazione $y = -2x + 2$, e la retta s di equazione $y = -4x + 13$. $[M(3; 2)]$

3 Determina l'equazione della retta r, sapendo che passa per M, punto medio del segmento $A(2; -1)$ e $B(4; -5)$, e per N, punto d'incontro fra le rette s e t rispettivamente di equazione $4y + 3 = 0$ e $2x - 2y + 3 = 0$. $[3x + 7y + 12 = 0]$

Matematica per il cittadino

I CICLISTI

Due amici ciclisti percorrono, a velocità costanti diverse, una pista circolare di 330 metri. Se partono insieme dallo stesso punto e pedalano nello stesso verso, si incontrano ogni 7 minuti e mezzo; se viaggiano in versi opposti, si incrociano ogni 18 secondi.

1. Indicati con s, t e v rispettivamente lo spazio percorso da un ciclista, il tempo impiegato a percorrerlo e la velocità costante dell'andatura, stabilisci quali relazioni sono vere.

1. $v = s \cdot t$
2. $s = v \cdot t$
3. $s = \frac{t}{v}$
4. $t = \frac{v}{s}$
5. $v = \frac{s}{t}$
6. $s = \frac{v}{t}$
7. $t = v \cdot s$
8. $t = \frac{s}{v}$

2. **VERO O FALSO?** I due amici partono contemporaneamente dallo stesso punto e, dopo una breve accelerazione iniziale, viaggiano ciascuno a velocità costante nello stesso verso. Se in un dato momento, successivo alla partenza, un ciclista sorpassa l'altro, si può affermare che:

a) i due ciclisti viaggiano alla stessa velocità. V F
b) i due ciclisti hanno percorso lo stesso spazio. V F
c) dalla partenza al momento dell'incontro è passato per entrambi lo stesso tempo. V F
d) ha compiuto almeno un giro in più. V F

3. Indicate con v_A e v_B le velocità dei due ciclisti ($v_A > v_B$), sulla base delle informazioni fornite imposta un sistema per determinare a quale velocità viaggiano i due sportivi.

4. Calcola i valori di v_A e v_B e specifica in quale unità di misura sono espressi.

5. Sulla base della seguente tabella, stabilisci che tipo di ciclisti sono i due amici.

ANDATURA	VELOCITÀ (km/h)
da passeggio	15-25
amatoriale	25-50
agonistica su strada piana	50-65
agonistica in volata su strada piana	65-75
agonistica in discesa	75-100

A Sono professionisti in allenamento su strada piana.

B Sono ciclisti amatori ben allenati.

C Sono ciclisti in passeggiata.

D Sono professionisti in volata su strada piana.

Verifiche di fine capitolo

TEST

Nel sito: ▶ questi test interattivi ▶ 30 test interattivi in più

1 Il sistema

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3x + y - z = 1 \\ 2x - y + 3z = -2 \end{cases}$$

è di grado:

A 3.
B 6.
C 1.
D 9.
E 0.

2 Fra i seguenti sistemi di due equazioni nelle incognite x e y, due sono lineari. Quali?

1. $\begin{cases} px - q^2 + 2y = 0 \\ qx - 3y = 1 - p \end{cases}$ 2. $\begin{cases} p - q + 2y = x^2 \\ p + q - x = y \end{cases}$

3. $\begin{cases} 5x - xy = 0 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x - 3y = q^2 \\ 5x + y = p^2 \end{cases}$

A 1 e 2 B 1 e 4 C 2 e 3 D 3 e 4 E 2 e 4

3 Le soluzioni di un'equazione lineare in due incognite sono:

A una sola coppia ordinata di numeri reali.
B tutte le coppie ordinate di numeri reali.
C un numero finito.
D infinite.
E due.

4 La coppia $(1; -3)$ è soluzione di uno dei seguenti sistemi. Quale?

A $\begin{cases} 3x + 5y = -12 \\ -2y = 9 - 3x \end{cases}$

B $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x + 5y = 0 \end{cases}$

C $\begin{cases} y = -3 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$

D $\begin{cases} 3x + y = 0 \\ x - y = -4 \end{cases}$

E $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$

5 Quale dei seguenti sistemi è impossibile?

A $\begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$

B $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 6x + 15y = 2 \end{cases}$

C $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 2x - 5y = 0 \end{cases}$

D $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 4x + 10y = 2 \end{cases}$

E $\begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$

6 Cosa possiamo dire dei seguenti sistemi?

1. $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 3x - 9y = 3 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 7x - 3y = -2 \\ 21x - 9y = -60 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ 6x - 2y = 4 \end{cases}$

A 1 è impossibile e 2 indeterminato.
B 1 e 2 sono indeterminati.
C 1 e 3 sono determinati.
D è determinato solo il terzo.
E 2 e 3 sono indeterminati.

7 Poiché nel sistema $\begin{cases} 3x + 5y = 0 \\ 2x + 7y = 0 \end{cases}$ si ha $D = 11$, $D_x = D_y = 0$, possiamo affermare che:

A il sistema è indeterminato.
B il sistema è impossibile.
C la soluzione del sistema è $(0; 0)$.
D la soluzione del sistema è $(11; 0)$.
E la soluzione del sistema è $(11; 11)$.

8 Soltanto uno dei seguenti sistemi traduce il problema: «La somma delle età di due fratelli è 24 anni. Fra 6 anni il maggiore avrà un'età doppia del minore». Quale?

A $\begin{cases} x + y = 24 \\ x = 2y \end{cases}$

B $\begin{cases} x + y = 24 \\ x + 6 = 2(y + 6) \end{cases}$

C $\begin{cases} x + y = 24 \\ x + 6 = 2y \end{cases}$

D $\begin{cases} x + y = 24 \\ x + 6 = 2y + 6 \end{cases}$

E $\begin{cases} x + y = 24 \\ x = 2y + 6 \end{cases}$

SPIEGA PERCHÉ

9 Cosa puoi concludere analizzando il sistema seguente? Qual è l'interpretazione grafica?

$$\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ -2x + y = 3 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$$

10 Cosa si intende per sistema letterale? Esistono valori di $a \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema seguente è determinato? Perché?

$$\begin{cases} 3ax - 4y = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

11 Un sistema letterale composto da due equazioni equivalenti è sempre indeterminato? Perché?

12 Un sistema lineare di due equazioni in due incognite è indeterminato quando i determinanti D, D_x e D_y sono tutti nulli? Perché?

13 Determina due numeri tali che la loro somma sia 12. Quante soluzioni ha questo problema? Quante soluzioni ammette se i due numeri sono naturali? E se vale anche la condizione che uno dei due numeri sia il doppio dell'altro?
[$x + y = 12$; infinite; sette; una]

14 È dato il seguente sistema: $\begin{cases} 3x - 7y = 1 \\ -6x + 14y = 3 \end{cases}$

Quanto vale il suo determinante? Osservando solo il determinante, puoi stabilire se il sistema è impossibile? In che modo potresti esserne sicuro?

ESERCIZI

Nel sito: ▶ 10 esercizi in più

Risolvi graficamente i seguenti sistemi lineari e poi verifica algebricamente la soluzione ottenuta applicando il metodo di riduzione.

15 $\begin{cases} y - 3x = 6 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$ [rette secanti; $(-2; 0)$]

16 $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 6x + 3y = 2 \end{cases}$ [rette parallele; impossibile]

17 $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x + 6y = 10 \end{cases}$ [rette coincidenti; indeterminato]

Per ogni sistema stabilisci se esso è determinato, impossibile o indeterminato, senza risolverlo.

18 $\begin{cases} 2x - y = -3 \\ -x + \dfrac{1}{2}y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$ [indeterminato]

19 $\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ 3x + y = 15 \end{cases}$ [determinato]

20 $\begin{cases} 2x - \dfrac{4}{3}y = 3 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$ [impossibile]

Risolvi i seguenti sistemi con i metodi più opportuni.

21 $\begin{cases} (x+2)^2 + 1 = x^2 + 5y \\ 3x + y = 1 \end{cases}$ [$(0; 1)$]

22 $\begin{cases} \dfrac{x+y}{3} + 3 = \dfrac{x-2y}{6} \\ x + \dfrac{2(4y-5x)}{9} = 1 \end{cases}$ $\left[\left(-15; -\dfrac{3}{4}\right)\right]$

23 $\begin{cases} 3(y-1) = -3(x+2) \\ 5x - 3y = 1 \end{cases}$ $\left[\left(-\dfrac{1}{4}; -\dfrac{3}{4}\right)\right]$

24 $\begin{cases} 2x + y + 4 = 0 \\ \dfrac{3x+y}{3} + \dfrac{2y-x}{5} = x + \dfrac{2}{5} \end{cases}$ [$(-2; 0)$]

25 $\begin{cases} \dfrac{3x+y}{5} = x - \dfrac{y+7}{10} - \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{y-x}{2} + \dfrac{2x+y}{3} = y + \dfrac{4}{9} \end{cases}$ $\left[\left(4; \dfrac{4}{3}\right)\right]$

26 $\begin{cases} x + \dfrac{1}{2} = \dfrac{y+1}{2} \\ \dfrac{1-y}{3} - 2x - 3 = 0 \end{cases}$ [$(-1; -2)$]

27 $\begin{cases} x+3+(y+1)^2=y^2 \\ 3(x+2y)=2 \end{cases}$ [impossibile]

28 $\begin{cases} \dfrac{x-y}{4}+\dfrac{y+2}{7}=2y-8 \\ 3y+4=\dfrac{8x-3y}{3}+\dfrac{9y-5x}{4} \end{cases}$ [(9; 5)]

29 $\begin{cases} 5x-y-13=0 \\ \dfrac{x-1}{3}-\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$ [(2; − 3)]

30 $\begin{cases} \dfrac{3x-3y}{2}-2x+\dfrac{y}{3}=\dfrac{5}{3} \\ \dfrac{x+y}{2}+\dfrac{y-2x}{3}=y+\dfrac{1}{9} \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{4}{3};-2\right)\right]$

31 $\begin{cases} (3x-2y-6)-\dfrac{2x-3y-3}{2}=\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{2}{3}(y-x)-(x-1)^2=(1-x)(1+x) \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{5}{2};-2\right)\right]$

32 $\begin{cases} \left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)-x(x+2)+6y=1 \\ (y-2)(y+3)+5=y(y-3)+2(x-y)+\dfrac{1}{4} \end{cases}$ [indeterminato]

33 $\begin{cases} \dfrac{2}{x^2-y^2}=\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{3}{4(x+y)} \\ \dfrac{4}{y}-x=\dfrac{x(3-y)}{y}+1 \end{cases}$ [(1; 1), non accettab.]

34 $\begin{cases} \dfrac{y+1}{x+1}-\dfrac{y-1}{x-1}=\dfrac{1}{x^2-1} \\ \left(\dfrac{y-1}{4}+2x\right)+\dfrac{y-6x}{2}=\dfrac{1}{4} \end{cases}$ $\left[\left(-\dfrac{7}{2};-4\right)\right]$

35 $\begin{cases} \dfrac{2x+y}{x-1}=\dfrac{1}{3} \\ 3x+y+1=0 \end{cases}$ $\left[\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)\right]$

36 $\begin{cases} \dfrac{x}{y+1}=\dfrac{1}{5} \\ \dfrac{1}{x-1}=\dfrac{2}{3y+1} \end{cases}$ [impossibile]

37 $\begin{cases} 3x+y-z=-2 \\ 5y+3z=-1 \\ 7x-2z=1 \end{cases}$ [(1; − 2; 3)]

38 $\begin{cases} x-y+2z=6 \\ 4x+2y+2z=0 \\ x+y+z=-1 \end{cases}$ [(1; − 3; 1)]

39 $\begin{cases} ax-3y=2a \\ (1-a)x+y=-1 \end{cases}$ $\left[\text{se } a\neq\dfrac{3}{2}, (-1;-a); \text{ se } a=\dfrac{3}{2}, \text{ indeterminato}\right]$

40 $\begin{cases} (a+1)x+ay=2 \\ x+ay=-3 \end{cases}$ $\left[\text{se } a\neq 0, \left(\dfrac{5}{a};\dfrac{-3a-5}{a^2}\right); \text{ se } a=0, \text{ impossibile}\right]$

---

41 Risolvi il seguente sistema con il metodo del confronto.

$\begin{cases} \dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{y+4}=0 \\ \dfrac{1}{3x+1}-\dfrac{1}{5y}=0 \end{cases}$ [(− 2; − 1)]

42 Risolvi il seguente sistema letterale.

$\begin{cases} \dfrac{ax}{a+1}-y=a \\ x-\dfrac{ay}{a+1}=0 \end{cases}$ $\left[\text{se } a\neq-1\wedge a\neq-\dfrac{1}{2}, \left(-\dfrac{a^2(a+1)}{2a+1};-\dfrac{a(a+1)^2}{2a+1}\right); \text{ se } a=-\dfrac{1}{2}, \text{ imp.; se } a=-1, \text{ perde sign.}\right]$

43 Risolvi il seguente sistema letterale.

$\begin{cases} \dfrac{2x+y+1}{a+1}+\dfrac{x-y}{a}=2 \\ 2ax-y=a^2 \end{cases}$ [se $a\neq 0 \wedge a\neq -1$, $(a; a^2)$; se $a=0 \vee a=-1$, perde sign.]

44 Determina per quali valori del parametro k il seguente sistema è indeterminato.

$$\begin{cases}(k+2)x+3y=-k\\ 14x+6y=-10\end{cases}$$

[$k=5$]

Problemi

45 In un rettangolo il perimetro è 34 cm e il doppio della base supera l'altezza di 10 cm. Determina l'area del rettangolo. [$72\ cm^2$]

46 Determina due numeri, sapendo che la somma tra il minore diminuito di 4 e il maggiore diminuito di 1 è 24 e, inoltre, che la loro somma è pari al doppio del minore aumentato di 5. [12; 17]

47 In un rombo la diagonale maggiore supera la minore di 6 cm, inoltre la somma tra i $\frac{3}{7}$ della maggiore e $\frac{1}{3}$ della minore è di 30 cm. Determina le diagonali del rombo. [36 cm; 42 cm]

48 Determina due numeri, sapendo che la loro differenza è 1 e che, se si aggiungono ai $\frac{2}{5}$ del maggiore i $\frac{3}{4}$ del minore, si ottiene 5. [(5; 4)]

49 La base di un rettangolo è i $\frac{3}{8}$ del suo perimetro, mentre i $\frac{4}{7}$ della base superano di 3 cm i $\frac{3}{2}$ dell'altezza. Determina la lunghezza dei lati del rettangolo. [42 cm; 14 cm]

50 A una festa di beneficenza sono presenti 275 persone, fra uomini, donne e bambini. Il numero complessivo delle donne e dei bambini è i $\frac{3}{2}$ di quello degli uomini. Il biglietto di ingresso costa € 5 per gli uomini, € 2,50 per le donne e € 1,50 per i bambini. Trova il numero degli uomini, delle donne e dei bambini presenti alla festa, sapendo che l'incasso totale è di € 882,50.
[uomini = 110; donne = 85; bambini = 80]

51 Determina per quali valori di k le rette di equazioni $kx-2y+4=0$ e $2kx-y=2$ si incontrano in un punto della bisettrice del primo e terzo quadrante. $\left[\frac{4}{5}\right]$

52 In un rombo la differenza tra i $\frac{7}{5}$ della diagonale maggiore e la metà della diagonale minore è 7 cm. La differenza tra i $\frac{5}{3}$ della diagonale maggiore e i $\frac{9}{7}$ della diagonale minore è uguale alla differenza delle diagonali. Calcola l'area del rombo. [$1050\ cm^2$]

53 Trova per quale valore di k le rette di equazioni $x-3y=6$ e $2x-(k+1)y=k$ si incontrano in un punto dell'asse y. [-2]

54 Determina il polinomio $P(x)=ax^3+bx^2+cx-8$ sapendo che:
- è divisibile per $(x+1)$;
- assume valore -18 per $x=1$;
- se viene diviso per $(x-2)$ ha come resto -24.

[$P(x)=x^3-x^2-10x-8$]

55 In due villaggi dell'Amazzonia la popolazione di uno era i $\frac{5}{6}$ della popolazione dell'altro. Una grave epidemia costrinse a emigrare 70 abitanti di ogni villaggio, per cui attualmente il primo villaggio ha i $\frac{4}{5}$ degli abitanti del secondo. Quanti abitanti ha oggi ciascun villaggio? [280 e 350]

56 Nel piano cartesiano xOy i punti $A(5;1)$, $B(0;5)$, $C(-4;2)$ sono i vertici di un parallelogramma $ABCD$ il cui vertice D si trova nel quarto quadrante.
a) Determina le coordinate di D.
b) Trova il piede H della perpendicolare BH alla diagonale AC.
c) Trova i punti di ordinata -3 che individuano con i punti A e C un triangolo rettangolo di ipotenusa AC.

$\left[\text{a) } D(1;-2);\ \text{b) } H\left(-\frac{31}{82};\frac{131}{82}\right);\ \text{c) } Q_1(1;-3),\ Q_2(0;-3)\right]$

57 Considera il sistema nelle incognite x e y:

$$\begin{cases}2x^n-ay=2\\ bx^2+y=1\end{cases}$$

Sapendo che è di secondo grado e che ha come soluzione $(-2;-1)$, trova a, b, n. $\left[6, \frac{1}{2}, 1\right]$

METTITI ALLA PROVA

Nel sito: ▶ 7 esercizi in più

58 Trova per quali valori di a e di b i seguenti sistemi sono equivalenti:

$$\begin{cases} x - 4y = 7 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} ax - 2by = -1 \\ bx - ay = 2 \end{cases}$$

[$a = -1, b = 1$]

59 Consideriamo due automobili: D con il motore diesel e B a benzina. Per l'auto D si paga una tassa annua di € 450 e l'auto percorre in media 22 km con un litro di gasolio. Per l'auto B la tassa annua è di € 120 e si percorrono 16 km con un litro di benzina. Sapendo che il gasolio costa € 1,21 al litro e la benzina € 1,32 al litro, calcola il numero di kilometri percorsi in un anno per i quali si spende la stessa somma usando le due automobili. Per un numero di kilometri maggiore quale delle due auto è più conveniente? [12 000 km; D]

60 Riempiendo di terra una carriola e ponendola su una bilancia, si rilevano complessivamente 45 kg. Dimezzando la quantità di terra, il tutto pesa 33 kg. Quanto pesa da sola la carriola? [21 kg]

61 TEST Un secchio pieno di sabbia pesa complessivamente 9 kg, riempito per metà di sabbia pesa 5 kg. Quanto pesa il secchio vuoto?

A 0,5 kg
B 1 kg
C 2 kg
D 2,5 kg
E Il peso del secchio non può essere determinato.

(*Olimpiadi della matematica*, *Giochi di Archimede*, 1996)

62 TEST Il prezzo della mascotte delle Olimpiadi della matematica è dato dalla somma del prezzo delle materie prime e di quello della lavorazione. L'anno scorso la mascotte costava € 10. Quest'anno il costo delle materie prime è raddoppiato; di conseguenza la mascotte costa € 11,80. Quanto incide quest'anno il prezzo delle materie prime sul prezzo finale del prodotto?

A Meno di € 1.
B Tra € 1 e 2.
C Tra € 2 e 3.
D Tra € 3 e 4.
E Più di € 4.

(*Olimpiadi della matematica*, *Giochi di Archimede*, 2000)

TEST YOUR SKILLS

Nel sito: ▶ 9 esercizi in più

63 Roger enjoys soccer and his team is pretty good: last season they won 7 more games than they lost. There were a total of 23 games; none were ties. How many games did his team win?

(CAN *John Abbott College*, Final Exam, 1999)

[15]

64 Trevor's farm of mutant animals has 3-legged goats and 5-legged goats. In one pen he counts 83 legs and 23 heads; how many 5-legged goats are there?

(USA *Rice University Mathematics Tournament*, 2005)

[7]

65 Jeff, Gareth and Ina all share the same birthday. Gareth is one year older than Jeff, and Ina is two years older than Gareth. This year the sum of their ages is 118. How old is Gareth?

(CAN *Canadian Open Mathematics Challenge*, 2003)

[39]

66 One cup of half-and-half cream contains 28 g of fat and 7 g of protein, while one cup of low-fat milk contains 5 g of fat and 8 g of protein. How many cups of half-and-half cream and how many cups of low-fat milk should be combined to get a mixture containing 71 g of fat and 38 g of protein?

(USA *Southeast Missouri State University: Math Field Day*, 2005)

[2; 3]

GLOSSARY

to enjoy: trovare piacere in	**to lose-lost-lost**: perdere	**team**: squadra
fat: grasso	**pen**: recinto per animali	**tie**: pareggio
goat: capra	**pretty**: piuttosto, abbastanza	**to win-won-won**: vincere
(…)-legged: a (…) zampe	**season**: stagione	