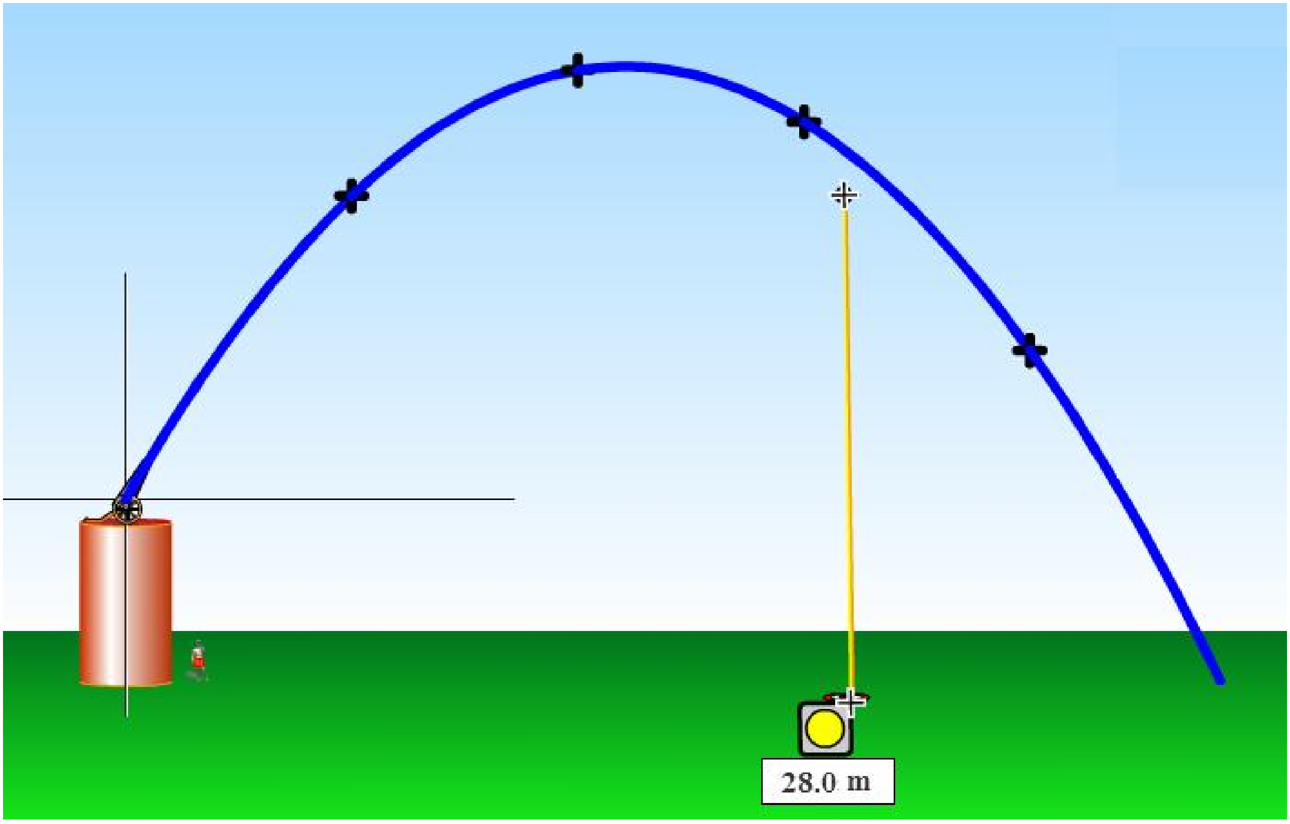
Il moto di un proiettile.
Correzione del problema
(ringrazio tutti coloro che mi fanno notare errori, imprecisioni o passaggi poco chiari)

Un proiettile viene lanciato da un cannoncino con una velocità di 25 m/s e con un angolo di 60° rispetto all'orizzontale da una collinetta alta 10 m.
Determina:

l'equazione del moto nella direzione orizzontale	$x = 12,5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}t$
le equazioni del moto nella direzione verticale	$\begin{cases} y = 21,65\frac{\text{m}}{\text{s}}t - 4,9\frac{\text{m}}{\text{s}^2}t^2 + 10\,\text{m} \\ v = 21,65\frac{\text{m}}{\text{s}} - 9,8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}t \end{cases}$
l'equazione della traiettoria del proiettile	$y = 1,7\,x - 0,031\frac{1}{\text{m}}x^2 + 10\,\text{m}$
Il tempo di volo	$t_{\text{v}} = 4,8\,\text{s}$
La gittata	$x_{\text{g}} = 60,2\,\text{m}$
Riuscirà il sasso a non colpire un palazzo alto 28 m che si trova a 40 m dal punto di partenza? Perché?	Il proiettile non colpirà il palazzo in quanto la sua altezza a 40 metri dal lancio è maggiore dell'altezza del palazzo.



Il moto del proiettile, nella sua componente orizzontale, è rettilineo uniforme per cui la sua equazione è:

$$x = v_{0x}\,t = v_0\left(\cos\alpha\right)t = 25,0\frac{\text{m}}{\text{s}}\left(\cos 60\right)t = 12,5\frac{\text{m}}{\text{s}}t \qquad (1)$$

Nella componente verticale si tratta invece di un moto rettilineo uniformemente accelerato, le cui equazioni sono:

$$\begin{cases} y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 + h = v_0(\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 + h = 21{,}7\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}t - 4{,}9\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}t^2 + 10\,\mathrm{m} \\ v = v_{0y} - gt = v_0(\sin\alpha) - gt = 21{,}7\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 9{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}t \end{cases} \quad (2)$$

Il tempo di volo del proiettile, l'intervallo di tempo tra l'istante in cui si stacca dal cannoncino e quello in cui impatta con il terreno (*y*=0), è uguale al tempo di volo di un grave lanciato verticalmente verso l'alto con la stessa velocità verticale del proiettile. Si tratta di risolvere il sistema:

$$\begin{cases} y = 21{,}7\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}t - 4{,}9\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}t^2 + 10\,\mathrm{m} \\ y = 0 \end{cases}$$

Risolvendo:

$$t = \frac{21{,}7\,\mathrm{m/s} \pm \sqrt{(21{,}7\,\mathrm{m/s})^2 - 4\cdot 4{,}9\,\mathrm{m/s^2}\cdot 10\,\mathrm{m}}}{9{,}8\,\mathrm{m/s^2}} = \begin{cases} t_\mathrm{v} = 4{,}8\,\mathrm{s} \\ t_2 = -0{,}4\,\mathrm{s} \end{cases}$$

Il valore negativo non è fisicamente significativo per cui non può essere accettato.

La gittata, essendo la distanza massima raggiunta dal proiettile nella componente orizzontale, si ricava sostituendo il tempo di volo nell'equazione (1) del moto orizzontale:

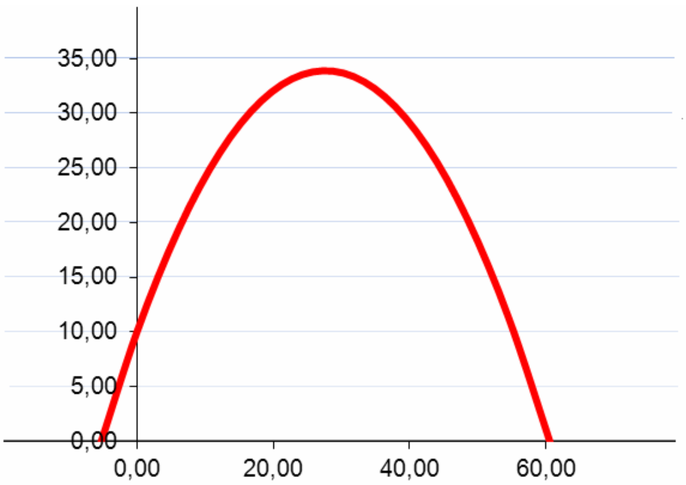
$$\text{gittata} = x_\mathrm{g} = v_{0x}\,t_v = 12{,}5\,\mathrm{m/s}\cdot 4{,}8\,\mathrm{s} = 60{,}0\,\mathrm{m}$$

Ricaviamo ora l'equazione della traiettoria risolvendo rispetto al tempo l'equazione (1) :

$$t = \frac{x}{v_{0x}}$$

e sostituendolo nell'equazione (2):

$$y = v_{0y}\frac{x}{v_{0x}} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_{0x}}\right)^2 + h = \frac{21{,}7\,\mathrm{m/s}}{12{,}5\,\mathrm{m/s}}x - \frac{4{,}9\,\mathrm{m/s^2}}{(12{,}5\,\mathrm{m/s})^2}x^2 + 10\,\mathrm{m} = 1{,}7\,x - 0{,}031\frac{1}{\mathrm{m}}x^2 + 10\,\mathrm{m}$$



Rappresentazione della traiettoria

La gittata può essere calcolata con un secondo procedimento, determinando l'intersezione della parabola (traiettoria) con l'asse delle ascisse che rappresenta il terreno.

Risolviamo quindi il sistema:

$$\begin{cases} y = -0{,}031\dfrac{1}{\mathrm{m}}x^2 + 1{,}7\,x + 10\,\mathrm{m} \\ y = 0 \end{cases}$$

Risolvendo:

$$x = \frac{1{,}7 \pm \sqrt{(1{,}7)^2 + 4 \cdot 10\,\mathrm{m} \cdot 0{,}031\,\mathrm{m}^{-1}}}{2 \cdot 0{,}031\,\mathrm{m}^{-1}} = \begin{cases} x_g = 60{,}2\,\mathrm{m} \\ x_2 = -5{,}4\,\mathrm{s} \end{cases}$$

Da ovvie considerazioni sul grafico della parabola, delle due soluzioni ci interessa quella positiva. La differenza dei valori determinati con i due procedimenti ovviamente dipende dagli arrotondamenti..

Per rispondere all'ultima domanda calcoliamo l'altezza del proiettile quado la sua posizione orizzontale è a 40 m dal punto del lancio.
Risolviamo quindi il sistema:

$$\begin{cases} y = -0{,}031\dfrac{1}{\mathrm{m}}x^2 + 1{,}7\,x + 10\,\mathrm{m} \\ x = 40\,\mathrm{m} \end{cases}$$

Da cui:

$$h = y_{40} = -0{,}031\frac{1}{\mathrm{m}}(40\,\mathrm{m})^2 + 1{,}7 \cdot 40\,\mathrm{m} + 10\,\mathrm{m} = 28{,}4\,\mathrm{m}$$

Poiché l'altezza del proiettile è maggiore dell'altezza del palazzo questo non sarà colpito.

Continuiamo con alcuni calcoli anche se non richiesti da problema.

Possiamo calcolarci anche l'altezza massima raggiunta dal proiettile con l'osservazione già precedentemente esaminata nel calcolo del tempo di volo; l'altezza massima raggiunta dal proiettile è l'altezza massima raggiunta da un grave lanciato verticalmente con la velocità iniziale verticale del proiettile:

Risolviamo il sistema (2) ponendo la velocità *v* della seconda equazione uguale a zero.

$$\begin{cases} y = 21{,}7\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}t - 4{,}9\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}t^2 + 10\,\mathrm{m} \\ 0 = 21{,}7\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 9{,}8\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}t \end{cases} \qquad \begin{cases} y_{\max} = 21{,}7\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}2{,}2\,\mathrm{s} - 4{,}9\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}(2{,}2\,\mathrm{s})^2 + 10\,\mathrm{m} = 34{,}0\,\mathrm{m} \\ t = 2{,}2s \end{cases}$$

L'altezza massima raggiunta dal proiettile è di 34,0 m.

Di seguito sono riportate alcune formule utili che possono servire come riferimento nel caso più generale del moto di un proiettile.
Un utile esercizio potrebbe essere quello di ricavare le formule, riportate sul testo, per i casi particolari.

t_v : tempo di volo

v_{oy} : componente verticale della velocita' iniziale

v_{oy} : componente orizzontale della velocita' iniziale

h : altezza del punto di lancio rispetto al terreno

y_g : gittata

$y_{\max}$: altezza massima raggiunta dal proiettile

Equazione della traiettoria: $y = \frac{v_{oy}}{v_{0x}} x - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_{0x}} \right)^2 + h$

$$t_v = \frac{v_{oy} + \sqrt{v_{0y}^2 + 2gh}}{g}$$

$$x_g = \frac{v_{0y} + \sqrt{v_{0y}^2 + 2gh}}{g} v_{0x}$$

$$y_{\max} = \frac{v_{0y}^2}{2g} + h$$