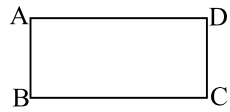
►1. Definizione di sistema di equazioni

Problema



Nel rettangolo ABCD, la somma del doppio di AB con la metà di BC è di 98m; aumentando AB di 3m e BC di 2m il perimetro del rettangolo diventa di 180m. Determinare l'area in m^2 del rettangolo.

Dati: Obiettivo: Area

$$2\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{BC}=98m.$$

$2(\overline{AB}+3m+\overline{BC}+2m)=180m.$

Soluzione:

Per determinare l'area del rettangolo dobbiamo moltiplicare le misure delle sue dimensioni$Area=\overline{AB}\cdot\overline{BC}$che però non conosciamo; il problema ha quindi due incognite.

Analizzando i dati possiamo osservare che ci sono fornite due informazioni che legano le grandezze incognite. Se poniamo $\overline{AB}=x$e$\overline{BC}=y$otteniamo le due equazioni

$$2x+\frac{1}{2}y=98 \quad 2(x+3+y+2)=180$$

che dovranno risultare soddisfatte per una stessa coppia di numeri reali.

DEFINIZIONE. Si definisce **sistema di equazioni** l'insieme di più equazioni, in due o più incognite, che devono essere verificate contemporaneamente. La scrittura formale si ottiene associando le equazioni mediante una parentesi graffa.

Analizzeremo in particolare i sistemi in due equazioni e due incognite.

DEFINIZIONI

L'Insieme Soluzione (I.S.) di un sistema di equazioni in due incognite è formato da tutte le coppie di numeri reali che rendono vere tutte le equazioni contemporaneamente.

Si chiama **grado di un sistema** il prodotto dei gradi delle equazioni che lo compongono. In particolare, se le equazioni che lo compongono sono di primo grado, il sistema si chiama **sistema lineare**.

La **forma normale o canonica** di un sistema lineare è: $\begin{cases} ax+by=c \\ a_1x+b_1y=c_1 \end{cases}$ con a, b, c, a_1, b_1, c_1 numeri reali.

Il problema proposto si formalizza dunque con il sistema: $\begin{cases} 2x+\frac{1}{2}y=98 \\ 2(x+3+y+2)=180 \end{cases}$ composto da due equazioni in due incognite di primo grado e pertanto il suo grado è 1 ed è un sistema lineare. La sua forma canonica si ottiene sviluppando i calcoli nella seconda equazione, si ottiene $\begin{cases} 2x+\frac{1}{2}y=98 \\ 2x+2y=170 \end{cases}$

►2. Procedimento per ottenere la forma canonica di un sistema

La **forma canonica** di un sistema lineare di due equazioni in due incognite è, come abbiamo visto, $\begin{cases} ax+by=c \\ a_1x+b_1y=c_1 \end{cases}$ con a, b, c, a_1, b_1, c_1 numeri reali.

Esempi

- Scrivere in forma canonica il sistema: $\begin{cases} 4x^2-(y+2x)^2=x+1-y(4x+y-1) \\ \frac{x-2}{2}+\frac{y+3}{3}=0 \end{cases}$

Eseguiamo i calcoli nella prima equazione e riduciamo allo stesso denominatore la seconda equazione:
$\begin{cases} 4x^2-y^2-4x^2-4xy=x+1-4xy-y^2+y \\ 3x-6+2y+6=0 \end{cases}$

Per mezzo del primo principio di equivalenza delle equazioni portiamo le incognite al primo membro e sommiamo i termini simili:
$\begin{cases} x+y=-1 \\ 3x+2y=0 \end{cases}$che è la forma canonica cercata.

►1. Metodo di sostituzione

Risolvere il sistema significa determinare tutte le coppie di numeri reali che soddisfano contemporaneamente le due equazioni.
Analizziamo i diversi metodi che permettono di ottenere l'**I**nsieme **S**oluzione, cominciamo dal **metodo di sostituzione**.

Esempio

$\begin{cases} -3x+y=2 \\ 5x-2y=7 \end{cases}$.

Il sistema si presenta già in forma canonica. Il metodo di sostituzione si svolge nei seguenti passi:

- 1° passo: scegliamo una delle due equazioni e una delle due incognite da cui partire. Applicando i principi d'equivalenza delle equazioni, ricaviamo questa incognita.

Nel nostro esempio, partiamo dalla prima equazione e ricaviamo l'incognita y

$\begin{cases} -3x+y=2 \\ 5x-2y=7 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} y=2+3x \\ 5x-2y=7 \end{cases}$

- 2° passo: sostituiamo nella seconda equazione, al posto dell'incognita trovata, l'espressione a cui è uguale.

Nel nostro esempio abbiamo $\begin{cases} y=2+3x \\ 5x-2y=7 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} y=2+3x \\ 5x-2(2+3x)=7 \end{cases}$

- 3° passo: svolgiamo i calcoli nella seconda equazione.

Nel nostro esempio abbiamo $\begin{cases} y=2+3x \\ 5x-4-6x=7 \end{cases}$

- 4° passo: risolviamo la seconda equazione, che ora è un'equazione di primo grado in una sola variabile.

Nel nostro esempio, ricaviamo x dalla seconda equazione $\begin{cases} y=2+3x \\ 5x-4-6x=7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=2+3x \\ -x=7+4 \rightarrow x=-11 \end{cases}$

- 5° passo: sostituiamo nella prima equazione il valore numerico dell'incognita trovata, avremo un'equazione di primo grado nell'altra incognita. Risolviamo quest'ultima equazione.

Nel nostro esempio $\begin{cases} y=2+3x \\ -x=7+4 \Rightarrow x=-11 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} x=-11 \\ y=-31 \end{cases}$

- 6° passo: possiamo ora scrivere l'insieme soluzione.

Nel nostro esempio $I.S.=\{(-11;-31)\}$
In conclusione, il sistema è **determinato**, la coppia ordinata $(-11;-31)$ verifica contemporaneamente le due equazioni del sistema.

$\begin{cases} \frac{1}{2}(x-1)+3y+\frac{1}{3}=\frac{1}{6} \\ y\,1+\frac{2}{5}-2=\frac{4}{5}-\frac{x-1}{5} \end{cases}$

Il sistema non si presenta nella forma canonica.
Svolgiamo i calcoli e portiamo il sistema in forma canonica: $\begin{cases} 3x+18y=-2 \\ x+7y=15 \end{cases}$

Ricaviamo x dalla seconda equazione $\begin{cases} 3x+18y=-2 \\ x=15-7y \end{cases}$

Abbiamo fatto questa scelta perché possiamo ottenere il valore di x con facilità e senza frazioni:

Sostituiamo nella prima equazione al posto di x l'espressione trovata: $\begin{cases} 3\cdot(15-7y)+18y=-2 \\ x=15-7y \end{cases}$

Risolviamo la prima equazione che è di primo grado nella sola incognita y: $\begin{cases} -3y=-47 \rightarrow y=\frac{47}{3} \\ x=15-7y \rightarrow x=\frac{284}{3} \end{cases}$

Sostituiamo il valore di y nella seconda equazione: $\begin{cases} x=\frac{284}{3} \\ y=\frac{47}{3} \end{cases}$

Possiamo scrivere l'insieme delle soluzioni: $I.S.=\left\{\frac{284}{3};\frac{47}{3}\right\}$

In conclusione, il sistema è **determinato;** la coppia ordinata $\frac{284}{3};\frac{47}{3}$verifica le due equazioni del sistema.

 $\begin{cases} \frac{1}{y} = 2\frac{x}{y} - \frac{1}{2} \\ \frac{5x+4y+19}{x} = -2 \end{cases}$

Il sistema è fratto poiché in ciascuna equazione compare l'incognita al denominatore; per poter applicare il secondo principio di equivalenza delle equazioni eliminando i denominatori, dobbiamo porre la **C**ondizioni di **E**sistenza e individuare il **D**ominio del sistema assegnato, cioè l'insieme in cui si troverà $C.E.\, y \neq 0$e$x \neq 0$per cui$D = \mathbb{R}_0 \times \mathbb{R}_0$

Portiamo a forma canonica applicando i principi di equivalenza delle equazioni:

$$\begin{cases} \frac{1}{y} = 2\frac{x}{y} - \frac{1}{2} \\ \frac{5x+4y+19}{x} = -2 \end{cases} \to \begin{cases} \frac{1}{y} = \frac{2x}{y} - 1 \\ 5x+4y+19 = -2x \end{cases} \to \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 7x + 4y = -19 \end{cases}$$

Applichiamo il metodo di sostituzione:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 7x + 4y = -19 \end{cases} \to \begin{cases} y = 2x - 1 \\ 7x + 4y = -19 \end{cases} \to \begin{cases} y = 2x - 1 \\ 7x + 4(2x-1) = -19 \end{cases} \to \begin{cases} y = 2x - 1 \\ 15x = -15 \end{cases} \to \begin{cases} y = 2(-1) - 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} y = -3 \\ x = -1 \end{cases}$$

La soluzione è compatibile con le condizioni di esistenza.

Risolvi i seguenti sistemi con il metodo di sostituzione

1 $\begin{cases} x=1 \\ x+y=1 \end{cases}$ $R.\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y=-2 \\ 2x-y+2=0 \end{cases}$

2 $\begin{cases} y=x \\ 2x-y+2=0 \end{cases}$ $R.\begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \end{cases}$ $\begin{cases} y=-x+1 \\ 2x+3y+4=0 \end{cases}$

3 $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 2x-y=-1 \end{cases}$ $R.\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2y=2 \\ x+y=1 \end{cases}$ $R.\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$

4 $\begin{cases} 3x-y=7 \\ x+2y=14 \end{cases}$ $R.\begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x-2y=1 \\ 4y-6x=-2 \end{cases}$ R. indeterminato

5 $\begin{cases} 3x+y=2 \\ x+2y=-1 \end{cases}$ $R.(1,-1)$ $\begin{cases} x+4y-1=3 \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+1=-\frac{x}{6}-1 \end{cases}$ $R.\begin{cases} x=-4 \\ y=2 \end{cases}$

6 $\begin{cases} 2x-3y=2 \\ 6x-9y=6 \end{cases}$ R. impossibile $\begin{cases} x+2y=14 \\ 3x-y=7 \end{cases}$ $R.\begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases}$

7 $\begin{cases} x+2y=1 \\ -2x-4y=2 \end{cases}$ R. impossibile $\begin{cases} 2x-y=3 \\ -6x+3y=-9 \end{cases}$ R. indeterminato

8 $\begin{cases} \frac{x-4y}{3}=x-5y \\ x-2=6y+4 \end{cases}$ $R.\begin{cases} x=-66 \\ y=-12 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{y^2-4x+2}{5}=\frac{2y^2-x}{10}-1 \\ x=-2y+8 \end{cases}$ $R.\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$

9 $\begin{cases} 3x-\frac{3}{4}(2y-1)=\frac{13}{4}(x+1) \\ \frac{x+1}{4}-\frac{y}{2}=\frac{1+y}{2}-\frac{1}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{x}{3}-\frac{y}{2}=0 \\ \frac{y-x-1}{2}+x-y+1=\frac{1}{2} \end{cases}$ R. (0;0)

10 $\begin{cases} y-\frac{x}{3}+\frac{3}{4}=0 \\ \frac{2x+1}{1-x}+\frac{2+y}{y-1}=-1 \end{cases}$ $R.-\frac{3}{20};-\frac{4}{5}$ $\begin{cases} x+y=2 \\ 3\frac{x}{6}+3y=4 \end{cases}$ $R.\ \frac{28}{17};\frac{6}{17}$

11 $\begin{cases} \frac{1}{2}y-\frac{1}{6}x=5-\frac{6x+10}{4} \\ 2(x-2)-3x=40-6y-\frac{1}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{2y}{3}+x+1=0 \\ \frac{y+1}{2}+\frac{x-1}{3}+1=0 \end{cases}$ $R.\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$

12 $\begin{cases} (x-2)^2+y=(x+1)(x-y)+(3-y)(2-x) \\ \frac{x}{4}-2y=2 \end{cases}$ $R.\begin{cases} x=-4 \\ y=-\frac{3}{2} \end{cases}$

13 $\begin{cases} y-\frac{3-2x}{3}=\frac{x-y}{3}+1 \\ \frac{x+1}{2}+\frac{5}{4}=y+\frac{2-3x}{4} \end{cases}$ $R.\ \frac{1}{6};\frac{35}{24}$

14 $\begin{cases} x+y+1=0 \\ x-y+k=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x-2y-3=0 \\ kx+(k+1)y+1=0 \end{cases}$

15 Risolvere il sistema che formalizza il problema del paragrafo 3: $\begin{cases} 2x+\frac{1}{2}y=98 \\ 2x+3y=170 \end{cases}$, concludere il problema determinando l'area del rettangolo.

16 Determinare due numeri reali x e y tali che il triplo della loro somma sia uguale al doppio del primo aumentato di 10 e il doppio del primo sia uguale al prodotto del secondo con 5.

►1. Metodo del confronto

Esempio

$\begin{cases} -3x+y=2 \\ 5x-2y=7 \end{cases}$

- 1° passo: ricaviamo da entrambe le equazioni la stessa incognita.

Nel nostro esempio ricaviamo la y contemporaneamente da entrambe le equazioni: $\begin{cases} y=2+3x \\ y=\frac{5x-7}{2} \end{cases}$

- 2° passo: poiché il primo membro di entrambe le equazioni è lo stesso, possiamo uguagliare anche i secondi membri, ottenendo un'equazione in una solo incognita.

Nel nostro esempio $2+3x=\frac{5x-7}{2}$

- 3° passo: si risolve l'equazione trovata e si determina il valore di una delle due incognite

Nel nostro esempio $4+6x=5x-7 \rightarrow x=-11$

- 4° passo: si sostituisce il valore trovato dell'incognita in una delle due equazioni e ricaviamo l'altra incognita.

Nel nostro esempio $\begin{cases} x=-11 \\ y=2+3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-11 \\ y=-31 \end{cases}$

- 5° passo: possiamo ora scrivere l'insieme soluzione.

Nel nostro esempio: $I.S.=\{(-11;-31)\}$.

In conclusione, il sistema è determinato, la coppia ordinata (-11;-31) verifica contemporaneamente le due equazioni del sistema.

Applica il metodo del confronto per risolvere i seguenti sistemi

1	$\begin{cases} x+y=0 \\ -x+y=0 \end{cases}$	$R.\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x+y=5 \\ x+2y=0 \end{cases}$	$R.\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$
2	$\begin{cases} x=2 \\ x+y=3 \end{cases}$	R.$2;1$	$\begin{cases} x=-1 \\ 2x-y=1 \end{cases}$	R.$-1;-3$
3	$\begin{cases} y=2x-1 \\ y=2x \end{cases}$	R. $\emptyset$	$\begin{cases} x-2y=1 \\ 2x-y=7 \end{cases}$	
4	$\begin{cases} x+y=2 \\ -x-y=2 \end{cases}$	R. $\emptyset$	$\begin{cases} 2x-y=4 \\ x-\frac{1}{2}y=2 \end{cases}$	R.$\mathbb{R}^+$
5	$\begin{cases} y-\frac{3x-4}{2}=1-\frac{y}{4} \\ 2y-2x=-\frac{4}{3} \end{cases}$	$R.\frac{2}{3};0$	$\begin{cases} \frac{2}{3}x-y+\frac{1}{3}=0 \\ x-\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}=0 \end{cases}$	R.$-\frac{1}{5};\frac{1}{5}$
6	$\begin{cases} \frac{1}{2}y-\frac{1}{6}x=5-\frac{6x+10}{8} \\ 8(x-2)+3x=40-6y-\frac{1}{6} \end{cases}$	$R.\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$	$\begin{cases} x=\frac{y-4}{3}+1 \\ y=\frac{x+3}{3} \end{cases}$	$R.\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$
7	$\begin{cases} x-y+k=0 \\ x+y=k-1 \end{cases}$			

8 In un triangolo isoscele la somma della base con il doppio del lato è 168m e la differenza tra la metà della base e 1/13 del lato è 28m. Indicata con x la misura della base e con y quella del lato, risolvete con il metodo del confronto il sistema lineare che formalizza il problema. Determinate l'area del triangolo.

►1. Metodo di riduzione

Il metodo di riduzione si basa sulla seguente osservazione: se un sistema è formato dalle equazioni $A = B$e $C = D$possiamo dedurre da queste la nuova equazione$A + C = B + D$

$$\begin{cases} A = B \\ C = D \end{cases} \rightarrow A + C = B + D$$

L'equazione ottenuta potrebbe presentarsi in una sola incognita e quindi potrebbe essere facile trovare il valore di quella incognita.

Esempi

 $\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 2x + 5y = -4 \end{cases}$

Sommando membro a membro le due equazioni otteniamo $(3x - 5y) + (2x + 5y) = 1 - 4$

I termini in y si eliminano perché opposti, sommando i monomi simili si ha $5x = -3 \rightarrow x = -\frac{3}{5}$.

Questo metodo, applicato semplicemente sommando membro a membro le equazioni, funziona solo se i coefficienti di una delle due incognite sono opposti. Solo in questo caso sommando le equazioni una delle due incognite 'sparisce'. Tuttavia con qualche accorgimento è possibile applicarlo in ogni caso.
Sfruttiamo il secondo principio di equivalenza delle equazioni che ci permette di moltiplicare ambo i membri di un’equazione per uno stesso numero diverso da zero. In questo modo possiamo sempre trasformare le due equazioni affinché l’incognita x appaia con coefficienti opposti nella prima e nella seconda equazione.

 $\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 5x - 4y = -4 \end{cases}$

Nel nostro esempio possiamo moltiplicare la prima equazione per 5 e la seconda per –3, otteniamo:

$\begin{matrix} +5 \\ -3 \end{matrix}\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 5x - 4y = -4 \end{cases}$da cui $\begin{cases} 15x - 25y = 5 \\ -15x + 12y = 12 \end{cases}$; sommando membro a membro abbiamo

$(15x - 25y) + (-15x + 12y) = 5 + 12 \rightarrow -13y = 17 \rightarrow y = -\frac{17}{13}$

Dopo aver determinato il valore di una incognita possiamo sostituirlo in una qulasiasi equazione del sistema e determinare il valore dell'altra incognita.

Nel nostro esempio moltiplichiamo come segue: $\begin{matrix} +4 \\ -5 \end{matrix}\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 5x - 4y = -4 \end{cases}$da cui $\begin{cases} 12x - 20y = 4 \\ -25x + 20y = 20 \end{cases}$

Sommando le due equazioni otteniamo $-13x = 24 \rightarrow x = -\frac{24}{13}$.

Abbiamo così determinato la coppia soluzione del sistema $-\frac{24}{13}; -\frac{17}{13}$.

Generalizzazione del metodo di riduzione

Assegnato il sistema lineare $\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$con a, b, c, a_1, b_1, c_1 numeri reali.

1° passo: per eliminare y moltiplichiamo la prima per b_1 e la seconda per $-b$:$\begin{cases} ab_1x + bb_1y = cb_1 \\ -a_1bx - bb_1y = -bc_1 \end{cases}$

2° passo: sommiamo le due equazioni: $ab_1x - a_1bx = cb_1 - bc_1 \rightarrow (ab_1 - a_1b)x = cb_1 - bc_1$

3° passo: ricaviamo l’incognita x: $x = \frac{cb_1 - bc_1}{ab_1 - a_1b} con ab_1 - a_1b \neq 0$

4° passo: per eliminare x moltiplichiamo la prima per $-a_1$ e la seconda per a: $\begin{cases} -aa_1x + ba_1y = -a_1c \\ aa_1x + ab_1y = ac_1 \end{cases}$

5° passo: sommiamo le due equazion$-a_1by + ab_1y = -a_1c + ac_1 \rightarrow (ab_1 - a_1b)y = ac_1 - a_1c$

6° passo: ricaviamo l’incognita y: $y = \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b} con ab_1 - a_1b \neq 0$

La soluzione è $\frac{cb_1 - bc_1}{ab_1 - a_1b}; \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b} con ab_1 - a_1b \neq 0$.

Risolvere i seguenti sistemi con il metodo di riduzione

1 $\begin{cases} x+y=0 \\ -x+y=0 \end{cases}$ $\quad R.\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

2 $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 2x-y=-1 \end{cases}$ $\quad R.\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$

3 $\begin{cases} 2x+y=1+y \\ 4x+y=2 \end{cases}$ $\quad R.\frac{1}{2};y=0$

4 $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=-1 \end{cases}$ $\quad R.-\frac{1}{2};\frac{1}{2}$

5 $\begin{cases} x-y=0 \\ -2x+3y=1 \end{cases}$ $\quad R.\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

6 $\begin{cases} 2x=3-x \\ 2x+y=3 \end{cases}$ $\quad R.\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

7 $\begin{cases} \frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y=3 \\ \frac{3}{2}x-\frac{3}{2}y=2 \end{cases}$ $\quad R.\frac{35}{12};\frac{19}{12}$

8 $\begin{cases} 5\mathrm{y}+2\mathrm{x}=1 \\ 3\mathrm{x}+2\mathrm{y}+2=0 \end{cases}$ $\quad R.-\frac{36}{37};\frac{17}{37}$

9 $\begin{cases} -3x+y=2 \\ 5x-2y=7 \end{cases}$ $\quad R.(-11;-31)$

10 $\begin{cases} 2x=3-x \\ 2x+y=3 \end{cases}$ $\quad R.\frac{3}{4};\frac{1}{2}$

11 $\begin{cases} \frac{4}{3}x-\frac{4y-x}{2}+\frac{35}{12}-\frac{x+y}{4}=0 \\ \frac{3(x+y)}{2}-\frac{1}{2}(5x-y)=\frac{1}{3}(11-4x+y) \end{cases}$ $\quad R.\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

12 $\begin{cases} x+ay+a=0 \\ 2x-ay+a=0 \end{cases}$

13 $\begin{cases} 2ax+2y-1=0 \\ ax+y=3 \end{cases}$

14 Il segmento AB misura 80cm; il punto P lo divide in due parti tali che il quadruplo della parte minore uguagli il triplo della differenza fra la maggiore e il triplo della minore. Determinare $\overline{AP} e \overline{PB}$, formalizzando il problema con un sistema lineare che risolverete con il metodo di riduzione.

►1. Metodo di Cramer

DEFINIZIONE. Si chiama **matrice del sistema lineare** di due equazioni in due incognite la tabella $\begin{bmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{bmatrix}$ in cui sono sistemati i coefficienti delle incognite del sistema posto in forma canonica; si chiama **determinante della matrice** il numero reale $D = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = a \cdot b_1 - b \cdot a_1$ ad essa associato.

Dalla generalizzazione del metodo di riduzione

$$\frac{cb_1 - bc_1}{ab_1 - a_1 b}; \frac{ac_1 - a_1 c}{ab_1 - a_1 b} \quad con \quad ab_1 - a_1 b \neq 0$$

possiamo dedurre che:

Un **sistema lineare** è **determinato**, ammette cioè una sola coppia soluzione **se il determinante della matrice del sistema è diverso da zero**.

1 Stabilire se il sistema $\begin{cases} (x-1)(x+1) - 3(x-2) = 2(x-y+3) + x^2 \\ x(x+y-3) + y(4-x) = x^2 - 4x + y \end{cases}$ è determinato.

2 Verificare che il determinante della matrice del sistema $\begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{7}{4}y = 10^5 \\ 6x - 7y = 5^{10} \end{cases}$ è nullo.

La regola di Cramer, dal nome del matematico svizzero Gabriel Cramer (1704-1752), ci permette di stabilire la coppia soluzione di un sistema lineare di due equazioni in due incognite, costruendo e calcolando tre determinanti:

- D il determinante della matrice del sistema: $D = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = a \cdot b_1 - b \cdot a_1$
- D_x il determinante $D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix} = c \cdot b_1 - b \cdot c_1$ della matrice ottenuta sostituendo in D agli elementi della prima colonna i termini noti. Osserviamo che questo numero è il numeratore della frazione (*)
- D_y il determinante $D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} = a \cdot c_1 - c \cdot a_1$ della matrice ottenuta sostituendo in D agli elementi della seconda colonna i termini noti. Osserviamo che questo numero è il numeratore della frazione (**)

Con la condizione $D \neq 0$ il sistema è determinato e la coppia soluzione è

$$x = \frac{D_x}{D}; y = \frac{D_y}{D}$$

<u>Esempio</u>

$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4x - 3y = 2 \end{cases}$

Calcoliamo i determinanti

$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = a \cdot b_1 - b \cdot a_1 \to D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) - 3 \cdot 4 = -6 - 12 = -18$

Poiché $D \neq 0$ il sistema è determinato

$D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix} = c \cdot b_1 - b \cdot c_1 \to D_x = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-3) - 3 \cdot 2 = -12 - 6 = -18$

$D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} = a \cdot c_1 - c \cdot a_1 \to D_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 4 \cdot 4 = 4 - 16 = -12$

$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-18}{-18} = 1$

$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-12}{-18} = \frac{2}{3}$.

Risolvere con la regola di Cramer i seguenti sistemi

1 $\begin{cases} x-3y=2 \\ x-2y=2 \end{cases}$ R. (2;0)

2 $\begin{cases} 2x+2y=3 \\ 3x-3y=2 \end{cases}$ $R. \frac{13}{12};\frac{5}{12}$

3 $\begin{cases} 5y+2x=1 \\ 3x+2y+2=0 \end{cases}$ $R. -\frac{12}{11};\frac{7}{11}$

4 $\begin{cases} 5x+2y=-1 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$ $R. 0;-\frac{1}{2}$

5 $\begin{cases} \frac{1}{2}y-\frac{2}{3}y=2 \\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y=1 \end{cases}$ $R. (21,-12)$

6 $\begin{cases} \frac{y}{5}-\frac{x}{2}=10 \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=5 \end{cases}$ R.$-\frac{240}{19};\frac{350}{19}$

7 $\begin{cases} 2(x-2y)+3x-2(y+1)=0 \\ x-2(x-3y)-5y=6(x-1) \end{cases}$ $R. \frac{34}{37};\frac{16}{37}$

8 $\begin{cases} 4-2x=\frac{3}{2}(y-1) \\ \frac{2x+3y}{2}=\frac{7+2x}{2} \end{cases}$ $R. 1;\frac{7}{3}$

9 $\begin{cases} 3x+y=-3 \\ -2x+3y=-2 \end{cases}$ R.$-1;0$

10 $\begin{cases} 6x-2y=5 \\ x+\frac{1}{2}y=0 \end{cases}$ R.$\frac{1}{2};-1$

11 $\begin{cases} 10x-20y=-11 \\ x+y-1=0 \end{cases}$ R.$\frac{3}{10};\frac{7}{10}$

12 $\begin{cases} 2x-3y+1=0 \\ 4x+6y=0 \end{cases}$ R.$-\frac{1}{4};\frac{1}{6}$

13 $\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+4y=1 \end{cases}$ R. $\emptyset$

14 $\begin{cases} 3x+2y=4 \\ \frac{3}{2}x+y=2 \end{cases}$ R.$\mathbb{R}^+$

15 $\begin{cases} ax+ay=3a^2 \\ x-2y=-3a \end{cases}$ R.$a;2a$

16 $\begin{cases} 3x-2y=8k \\ x-y=3k \end{cases}$ R.$2k;-k$

17 Risolvi col metodo di Cramer il sistema $\begin{cases} 25x-3y=18 \\ \frac{3(y+6)}{5}=5x \end{cases}$. Cosa osservi?

►1. Classificazione dei sistemi rispetto alle soluzioni

Dato un sistema in forma canonica $\begin{cases} ax + by = c \\ a_1 x + b_1 y = c_1 \end{cases}$ ricordando che:

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = a \cdot b_1 - b \cdot a_1 \quad D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix} = c \cdot b_1 - b \cdot c_1 \quad D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} = a \cdot c_1 - c \cdot a_1$$

- Se D≠0 il sistema è **determinato**, esiste una sola coppia soluzione $x = \frac{D_x}{D}; y = \frac{D_y}{D}$
- Se D=0 si possono verificare due casi:
  - 1° caso: se D_x=0 e D_y=0 il sistema è **indeterminato**, tutte le coppie di numeri reali verificano entrambe le equazioni, $I.S. = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$**;**
  - 2° caso: se D_x≠0 e D_y≠0 il sistema è **impossibile**, non esiste alcuna coppia che soddisfa entrambi le equazioni e $I.S. = \emptyset$

Esempi

- $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 4x - 3y = 2 \end{cases}$

$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) - 3 \cdot (-3) = -6 - 9 = -15 \neq 0$il sistema è determinato.

- $\begin{cases} 8x - 6y = 2 \\ 4x - 3y = 1 \end{cases}$

$D = \begin{vmatrix} 8 & -6 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 8 \cdot (-3) - 4 \cdot (-6) = -24 + 24 = 0$il sistema è indeterminato o impossibile.

$D_x = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) - (-6) \cdot 1 = -6 + 6 = 0$ $D_y = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 8 \cdot 1 - 2 \cdot 4 = 8 - 8 = 0$

Il sistema è indeterminato.

- $\begin{cases} 8x - 6y = 1 \\ 4x - 3y = 2 \end{cases}$

$D = \begin{vmatrix} 8 & -6 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 8 \cdot (-3) - 4 \cdot (-6) = -24 + 24 = 0$il sistema è indeterminato o impossibile.

$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) - (-6) \cdot 2 = -3 + 12 = +9$ $D_y = \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 8 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = 16 - 4 = 12$

Il sistema è impossibile.

Osserviamo che se D=0 si ha $a \cdot b_1 - b \cdot a_1 = 0 \to a \cdot b_1 = b \cdot a_1 \to \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$. Ciò significa che, se i coefficienti delle incognite della prima equazione sono proporzionali ai coefficienti delle incognite della seconda equazione allora il sistema è indeterminato o impossibile.

In particolare, se poi D_x=0 si ha $c \cdot b_1 - b \cdot c_1 = 0 \to c \cdot b_1 = b \cdot c_1 \to \frac{c}{c_1} = \frac{b}{b_1}$. Quindi se anche i termini noti delle due equazioni sono nella stessa proporzione, cioè se $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$il sistema è indeterminato.

Se invece D_x≠0, cioè $\frac{c}{c_1} \neq \frac{b}{b_1}$il sistema è impossibile.

Per ciascuno dei seguenti sistemi stabilisci se è determinato, indeterminato, impossibile.

1 $\begin{cases} x-2y=3 \\ 4x-8y=12 \end{cases}$

2 $\begin{cases} x-2y=3 \\ 2x-4y=5 \end{cases}$

3 $\begin{cases} x-2y=3 \\ 2x-6y=12 \end{cases}$

4 $\begin{cases} \frac{1}{2}x-\frac{3}{2}y=-2 \\ \frac{5}{4}x-\frac{15}{4}y=-\frac{5}{2} \end{cases}$

5 $\begin{cases} \frac{1}{7}x-\frac{4}{5}y=0 \\ \frac{5}{4}x-7y=\frac{19}{2} \end{cases}$

6 $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 2x-y=-1 \end{cases}$

7 $\begin{cases} -40x+12y=-3 \\ 17x-2y=100 \end{cases}$

8 $\begin{cases} x-y=3 \\ -x+y=1 \end{cases}$

9 $\begin{cases} -x+3y=-\frac{8}{15} \\ 5x-15y=\frac{2^3}{3} \end{cases}$

10 $\begin{cases} \frac{x}{2}=-\frac{y}{2}+1 \\ x+y=2 \end{cases}$

11 La somma di due numeri reali è 16 e il doppio del primo aumentato di 4 uguaglia la differenza tra 5 e il doppio del secondo. Stabilisci, dopo aver formalizzato il problema con un sistema lineare, se è possibile determinare i due numeri.

12 Stabilisci per quale valore di a il sistema $\begin{cases} ax+y=-2 \\ -3x+2y=0 \end{cases}$ è determinato. Se $a=-\frac{3}{2}$ il sistema è indeterminato o impossibile?

13 Perché se $a=\frac{1}{3}$ il sistema $\begin{cases} x+ay=2a \\ 3x+y=2 \end{cases}$ è indeterminato?

14 $\begin{cases} 2x-3ky=2k \\ x-ky=2k \end{cases}$ per quale valore di k il sistema è impossibile?

15 $\begin{cases} (k-2)x+3y=6 \\ (k-1)x+4y=8 \end{cases}$ per quale valore di k il sistema è indeterminato?

►1. Il metodo grafico

Il problema della ricerca dell'Insieme Soluzione di un'equazione lineare ci ha condotto ad un proficuo collegamento tra concetti algebrici e concetti geometrici; in particolare abbiamo visto che:

Concetto algebrico	Concetto geometrico
Coppia ordinata di numeri reali	Punto del piano dotato di riferimento cartesiano
Equazione lineare	Retta
Coppia soluzione dell'equazione $ax+by+c=0$	Punto della retta di equazione $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

Vedremo ora come sia possibile sfruttare questi collegamenti per risolvere un sistema lineare di due equazioni in due incognite.

Problema

Determina due numeri reali di cui si sa che la loro somma è 6 e il doppio del primo aumentato della metà del secondo è ancora 6.

Indichiamo con x e y i due numeri incogniti; il problema si formalizza con due equazioni:

$$x+y=6 \text{e } \ 2x+\frac{1}{2}y=6$$

Dobbiamo individuare una coppia di numeri reali che sia soluzione dell'una e dell'altra equazione.

Il punto di vista algebrico:

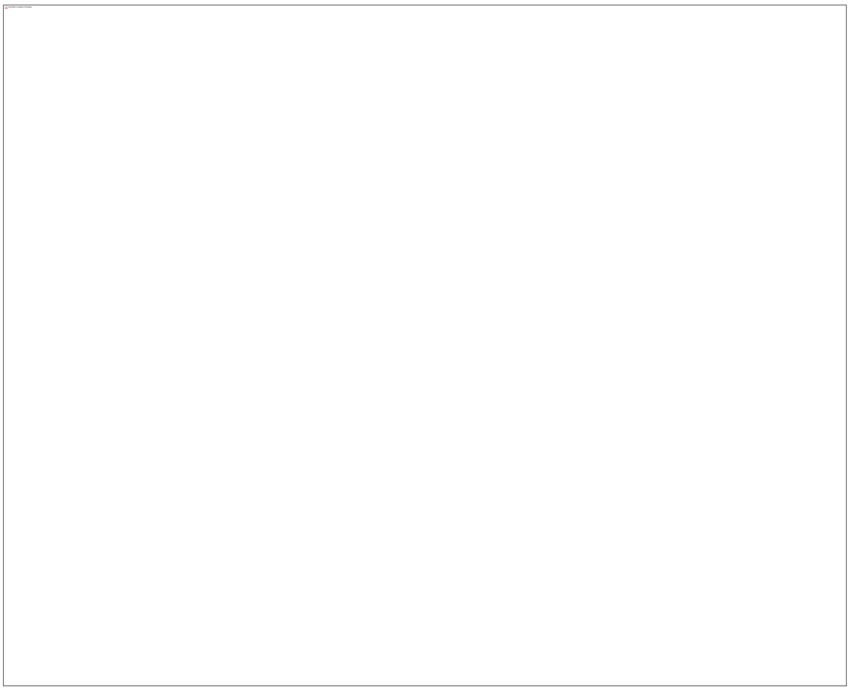
La coppia di numeri reali x e y che risolve il problema è quella che risolve il sistema $\begin{cases} x+y=6 \\ 2x+\frac{1}{2}y=6 \end{cases}$.

Applicando uno qualunque dei metodi algebrici esposti si ottiene x=2 e y=4.

Il punto di vista geometrico:

Il problema si può spostare in ambiente geometrico: la coppia soluzione rappresenta un punto che appartiene sia alla retta rappresentata dalla prima equazione sia alla retta rappresentata dalla seconda equazione, quindi il punto di intersezione delle due rette.

Si rappresenta nel riferimento cartesiano ortogonale il sistema:



La retta *a* è quella di equazione $x+y=6$, che passa per i punti (6,0) e (0,6).

La retta *b* è quella di equazione $2x+\frac{1}{2}y=6$, che passa per i punti (3,0) e (0,12).

Il punto A(2,4) è il punto di intersezione delle due rette, le sue coordinate formano la coppia soluzione del sistema e di conseguenza sono i due numeri che stiamo cercando nel problema.

Esempio

- $\begin{cases} 2x-3y=7 \\ x+y+6=5(x-y+1) \end{cases}$

Il punto di vista algebrico:

Portiamo in forma canonica il sistema, otteniamo:

$\begin{cases} 2x-3y=7 \\ x+y+6=5(x-y+1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x-3y=7 \\ x+y+6=5x-5y+5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x-3y=7 \\ -4x+6y=-1 \end{cases}$

Si può notare che il sistema ha i coefficienti delle incognite in proporzione: $\frac{a}{a_1}=\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2}$; $\frac{b}{b_1}=\frac{-3}{+6}=-\frac{1}{2}$, mentre i termini noti non sono nella stessa proporzione $\frac{c}{c_1}=\frac{7}{-1}$ quindi il sistema è impossibile: $I.S.=\emptyset$.

Il punto di vista geometrico

Determiniamo le equazioni esplicite delle rette rappresentate dalle due equazioni lineari del sistema assegnato. Si ha:

$\begin{cases} y=\frac{2}{3}x-\frac{7}{3} \\ y=\frac{2}{3}x-1 \end{cases}$ le due rette hanno lo stesso coefficiente angolare, il coefficiente della x e quindi hanno la stessa inclinazione, pertanto sono parallele.

Non hanno quindi nessun punto di intersezione $r_1 \cap r_2 = \emptyset$, il sistema è impossibile $I.S.=\emptyset$.

- $\begin{cases} 2x+3y+1=0 \\ y+\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}x \end{cases}$

Il punto di vista algebrico:

Scriviamo in forma canonica il sistema $\begin{cases} 2x+3y=-1 \\ 2x+3y=-1 \end{cases}$. Osserviamo che sono due equazioni identiche, pertanto il rapporto tra i coefficienti delle incognite e il rapporto tra i termini noti è sempre 1. Il sistema è indeterminato. D'altra parte, se le due equazioni sono identiche significa che tutte le infinite coppie (x, y) che rendono vera la prima equazione, verificano anche la seconda: $I.S.=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Il punto di vista geometrico:

Rappresentiamo nel riferimento cartesiano ortogonale le due rette aventi come equazioni le equazioni del sistema. E' semplice rendersi conto che le due rette coincidono: tutti i punti di una coincidono con tutti i punti dell'altra;

$r_1 \cap r_2 = r_1 = r_2$.

Risolvi graficamente i sistemi, in base al disegno verifica se le rette sono incidenti, parallele o coincidenti e quindi se il sistema è determinato, impossibile o indeterminato:

1 $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$ R. rette parallele, sistema impossibile

2 $\begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = 3x + 1 \end{cases}$ R. (-3;-8)

3 $\begin{cases} y = x - 1 \\ 2y = 2x - 2 \end{cases}$ R. rette identiche, sistema indeterminato

4 $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 2y - x = 2 \end{cases}$ R(2;2)

5 $\begin{cases} \frac{x}{3} = -\frac{y}{3} + 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$ R. rette parallele, sistema impossibile

6 $\begin{cases} 3x + y = -3 \\ -2x + 3y = -2 \end{cases}$ R. $-1; 0$

7 $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$ R. (2;0)

8 $\begin{cases} 3x + y = -3 \\ -2x + 3y = -2 \end{cases}$ R. $-1; 0$

9 $\begin{cases} 5x + 2y = -1 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$ $R. 0; -\frac{1}{2}$

10 $\begin{cases} 2x = 3 - x \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ R.(1;1)

11 $\begin{cases} 2x = 3 - x \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ $R. \frac{3}{4}; \frac{1}{2}$

12 *Vero / Falso*

Risolvere graficamente un sistema lineare significa trovare il punto di intersezione di due rette	V	F
Un sistema lineare, determinato ha una sola coppia soluzione	V	F
Un sistema lineare è impossibile quando le due rette coincidono	V	F

13 Completa:

se $r_1 \cap r_2 = r_1 = r_2$ allora il sistema è ………………………………

se $r_1 \cap r_2 = P$ allora il sistema è ………………………………

se $r_1 \cap r_2 = \emptyset$ allora il sistema è ………………………………

Risolvi i seguenti sistemi con più metodi ed eventualmente controlla la soluzione graficamente

14	$\begin{cases} 2x+y=1 \\ 2x-y=-1 \end{cases}$	$R.\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x=1+3y \\ -y-2x=3 \end{cases}$	$R.\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$
15	$\begin{cases} -x+2y=1 \\ 3x-y=3 \end{cases}$	$R.\frac{7}{5};\frac{6}{5}$	$\begin{cases} 5x-y=2 \\ 2x+3y=-1 \end{cases}$	$R.\frac{5}{17};-\frac{9}{17}$
16	$\begin{cases} x+2y=3 \\ 3x-y=2 \end{cases}$	$R.1;1$	$\begin{cases} 2x-y=1 \\ x+2y=2 \end{cases}$	$R.\frac{4}{5};\frac{3}{5}$
17	$\begin{cases} 5x+3y=2 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$	$R.\frac{7}{19};\frac{1}{19}$	$\begin{cases} 7x-2y=4 \\ 8x-6y=9 \end{cases}$	$R.\frac{3}{13};-\frac{31}{26}$
18	$\begin{cases} 3x-2y=4 \\ 2x+3y=5 \end{cases}$	$R.\frac{22}{13};\frac{7}{13}$	$\begin{cases} 3x-y=7 \\ x-2y=5 \end{cases}$	$R.\frac{9}{5};-\frac{8}{5}$
19	$\begin{cases} 3x-2y=2 \\ 2y-2x=-\frac{4}{3} \end{cases}$	$R.\begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ y=0 \end{cases}$	$\begin{cases} 5x-2x=7 \\ -x-2y=-\frac{1}{2} \end{cases}$	$R.\frac{7}{3};-\frac{11}{12}$
20	$\begin{cases} \frac{2}{3}x-2y=-\frac{1}{6} \\ -y-\frac{2}{3}y=\frac{3}{2} \end{cases}$	$R.-\frac{59}{20};-\frac{9}{10}$	$\begin{cases} \frac{1}{3}x-\frac{3}{2}y+1=0 \\ 9y-2x-6=0 \end{cases}$	indeterminato
21	$\begin{cases} -\frac{1}{3}x+\frac{3}{2}y-1=0 \\ 3x-\frac{1}{5}y+\frac{3}{2}=0 \end{cases}$	$R.\begin{cases} x=-\frac{123}{266} \\ y=\frac{75}{133} \end{cases}$	$\begin{cases} -\frac{2}{3}y+3x=y \\ x-\frac{1}{2}y+3=0 \end{cases}$	$R.\begin{cases} x=-30 \\ y=-54 \end{cases}$
22	$\begin{cases} 5y+\frac{3}{2}x=-2 \\ 3x+10y-3=0 \end{cases}$	impossibile	$\begin{cases} \frac{1}{2}x-3y=\frac{1}{2} \\ 3(y-2)+x=0 \end{cases}$	$R.\frac{13}{3};\frac{5}{9}$
23	$\begin{cases} 2x+y=0 \\ x-2y=-5 \end{cases}$	R.$-1;2$	$\begin{cases} x+y=-1 \\ x-y=5 \end{cases}$	R.$2;-3$
24	$\begin{cases} 2x+2y=6 \\ x-2y=-3 \end{cases}$	R.$3;3$	$\begin{cases} 2x-y=3 \\ x-2y=0 \end{cases}$	R.$2;1$
25	$\begin{cases} \frac{1}{3}x+3y+2=0 \\ 2x-\frac{1}{2}y=\frac{11}{2} \end{cases}$	R.$3;-1$	$\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=1 \\ \frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y=1 \end{cases}$	R.$1;1$
26	$\begin{cases} 2x-y=0 \\ 4x+\frac{1}{2}y=\frac{5}{2} \end{cases}$	R.$\frac{1}{2};1$	$\begin{cases} 2x+\frac{1}{2}y=\frac{3}{10} \\ 7x+23y=6 \end{cases}$	R.$-\frac{1}{5};\frac{1}{5}$
27	$\begin{cases} 2x+y-3=0 \\ 4x+2y+6=0 \end{cases}$	R.$\mathbb{R}^+$	$\begin{cases} 2x-y=-1 \\ x+\frac{1}{2}y=-\frac{1}{2} \end{cases}$	R.$-\frac{1}{2};0$
28	$\begin{cases} \frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y=1 \\ 3x-2y=3 \end{cases}$	R. $\emptyset$	$\begin{cases} 8x-\frac{29}{10}y=7 \\ 5x-\frac{2}{3}y=12 \end{cases}$	R.$\frac{8}{5};-2$
29	$\begin{cases} \frac{1}{2}(x-3)-y=\frac{3}{2}(y-1) \\ \frac{3}{2}(y-2)+x=6x+\frac{1}{3} \end{cases}$	$R.\begin{cases} x=-\frac{50}{47} \\ y=-\frac{10}{47} \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{x+4y}{6}-3=0 \\ \frac{x}{2}-\frac{y}{4}=0 \end{cases}$	$R.\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$

30	$\begin{cases} 3(x-4)=-\frac{4y}{5} \\ 7(x+y)+8x-\frac{3y}{8}-2=0 \end{cases}$	indeterminato
31	$\begin{cases} \frac{2}{5}(y-x-1)=\frac{y-x}{3}-\frac{2}{5} \\ (x-y)^2-x(x-2y)=x+y(y-1) \end{cases}$	
32	$\begin{cases} 2x-3(x-y)=-1+3y \\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=-\frac{1}{6} \end{cases}$	$R.\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$
33	$\begin{cases} (y+2)(y-3)-(y-2)^2+(x+1)^2=(x+3)(x-3)-\frac{1}{2} \\ y-\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}-(y-1)^2+2x+3=\frac{3}{4} \end{cases}$	$R.\begin{cases} x=-1 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$

34 $\begin{cases} \dfrac{\frac{x}{2}-y+5}{\frac{4}{3}-\frac{5}{6}} = x - \dfrac{\frac{x}{2}-\frac{y}{3}}{2} \\ -x - \dfrac{\frac{y}{3}-x}{2} = 1 \end{cases}$ $R. \begin{cases} x = -\frac{92}{27} \\ y = \frac{38}{9} \end{cases}$

35 $\begin{cases} x^2 + \frac{y}{4} - 3x = \frac{(2x+1)^2}{4} - \frac{y}{2} \\ (y-1)^2 = -8x + y^2 \end{cases}$ $R. \begin{cases} x = \frac{1}{8} \\ y = 1 \end{cases}$

36 $\begin{cases} \dfrac{\frac{x+1}{2}-y}{2} = y - 20x \\ x - \frac{y}{4} = \frac{x-y}{6} \end{cases}$ $R. \begin{cases} x = -\frac{1}{21} \\ y = -\frac{10}{21} \end{cases}$

37 $\begin{cases} \dfrac{4y-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}}{\frac{5}{6}} = x - 2y \\ x = 3y \end{cases}$ $R. \begin{cases} x = \frac{27}{26} \\ y = \frac{9}{26} \end{cases}$

►1. Sistemi fratti

Nel seguente sistema $\begin{cases} \frac{2}{x+1}-\frac{3}{y-2}=\frac{2x-5y+4}{xy+y-2-2x} \\ 3y+2(x-y-1)=5x-8(-x-2y+1) \end{cases}$ di due equazioni in due incognite, la prima equazione presenta le incognite anche al denominatore.

DEFINIZIONE. Si chiama **sistema fratto o frazionario** il sistema in cui almeno in una delle equazioni che lo compongono compare l'incognita al denominatore.

Poiché risolvere un sistema significa determinare tutte le coppie ordinate che verificano entrambe le equazioni, nel sistema fratto dovremo innanzi tutto definire il Dominio o Insieme di Definizione nel quale individuare le coppie soluzioni.

DEFINIZIONE. Si chiama **Dominio** (**D**) o **Insieme di Definizione** (**I.D.**) del sistema fratto, l'insieme delle coppie ordinate che rendono diverso da zero i denominatori che compaiono nelle equazioni.

Esempi

- $\begin{cases} \frac{2}{x+1}-\frac{3}{y-2}=\frac{2x-5y+4}{xy+y-2-2x} \\ 3y+2(x-y-1)=5x-8(-x-2y+1) \end{cases}$

1° passo: scomponiamo i denominatori nella prima equazione per determinare il m.c.m. $\begin{cases} \frac{2}{x+1}-\frac{3}{y-2}=\frac{2x-5y+4}{(x+1)(y-2)} \\ 3y+2(x-y-1)=5x-8(-x-2y+1) \end{cases}$ $\rightarrow m.c.m.=(x+1)(y-2)$

2° passo: poniamo le **C**ondizioni di **E**sistenza da cui determineremo il **D**ominio del sistema: $C.E.\, x\neq -1 e y\neq 2 \rightarrow D=I.S.=\{(x;y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} | x\neq -1 e y\neq 2\}$.

3° passo: riduciamo allo stesso denominatore la prima equazione, svolgiamo i calcoli nella seconda per ottenere la forma canonica: $\begin{cases} -5x+7y=11 \\ 11x+15y=6 \end{cases}$

4° passo: risolviamo il sistema e otteniamo la coppia soluzione $-\frac{123}{152};\frac{151}{152}$ che è accettabile.

- $\begin{cases} \frac{3x+y-1}{x}=3 \\ \frac{2x+3y}{y-1}=7 \end{cases}$

1°passo: per la prima equazione si ha $m.c.m.=x$; per la seconda $m.c.m.=y-1$

2° passo: poniamo le **C**ondizioni di **E**sistenza da cui determineremo il **D**ominio: $C.E.\, x\neq 0 e y\neq 1 \rightarrow D=I.S.=\{(x;y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} | x\neq 0 e y\neq 1\}$

3° passo: riduciamo allo stesso denominatore sia la prima che la seconda equazione: $\begin{cases} 3x+y-1=3x \\ 2x+3y=7y-7 \end{cases}$

4° passo: determiniamo la forma canonica: $\begin{cases} y-1=0 \\ 2x-4y=-7 \end{cases}$

5° passo: determiniamo con un qualunque metodo la coppia soluzione: $-\frac{3}{2};1$ che non accettabile poiché contraddice la C.E. e quindi non appartiene al dominio. Il sistema assegnato è quindi impossibile $I.S.=\emptyset$.

Verifica l'insieme soluzione dei seguenti sistemi

1	$\begin{cases} \frac{4y+x}{5x}=1 \\ \frac{x+y}{2x-y}=2 \end{cases}$	indeterminato	$\begin{cases} y=\frac{4x-9}{12} \\ \frac{y+2}{y-1}+\frac{1+2x}{1-x}+1=0 \end{cases}$	R. $-\frac{9}{8},-\frac{9}{8}$
2	$\begin{cases} 2+\frac{3y}{x}=\frac{1}{x} \\ \frac{3x}{y}-1=\frac{-2}{y} \end{cases}$	$R.\begin{cases} x=-\frac{5}{11} \\ y=\frac{7}{11} \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{y}{2x-1}=-1 \\ \frac{2x}{y-1}=1 \end{cases}$	impossibile
3	$\begin{cases} \frac{3x}{y}-\frac{7}{y}=1 \\ \frac{2y}{x}+\frac{5}{x}=1 \end{cases}$	$R.\begin{cases} x=\frac{9}{5} \\ y=-\frac{8}{5} \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{2x}{3y}-\frac{1}{3y}=1 \\ \frac{3}{y+2x}=-1 \end{cases}$	$R.\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$
4	$\begin{cases} \frac{x}{9y}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{3y} \\ \frac{9y}{2x}-1-\frac{3}{x}=0 \end{cases}$	impossibile	$\begin{cases} \frac{x}{2-\frac{y}{2}-2}=1 \\ \frac{x-y}{x+\frac{3}{2}y-1}=1 \end{cases}$	$R.\begin{cases} x=-\frac{1}{5} \\ y=\frac{2}{5} \end{cases}$
5	$\begin{cases} \frac{\frac{x}{2}+\frac{2y}{3}-\frac{1}{6}}{x+y-2}=6 \\ x+y=1 \end{cases}$	$R.\begin{cases} x=39 \\ y=-38 \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{x-2y}{4}=\frac{\frac{x-y}{2}+2x}{4} \\ \frac{x}{\frac{y}{3}+1}=1 \end{cases}$	$R.\begin{cases} x=\frac{3}{4} \\ y=-\frac{3}{4} \end{cases}$
6	$\begin{cases} \frac{x+3y-1}{x-y}=\frac{1}{y-x} \\ x=2y-10 \end{cases}$	$\mathrm{R.}\begin{cases} x=-6 \\ y=2 \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{2}{x-2}-\frac{3}{y+3}=1 \\ \frac{5}{y+3}=\frac{6}{2-x}-4 \end{cases}$	$\mathrm{R.}\begin{cases} x=-2 \\ y=-5 \end{cases}$
7	$\begin{cases} y-\frac{x}{3}+\frac{3}{4}=0 \\ \frac{2x+1}{1-x}+\frac{2+y}{y-1}=-1 \end{cases}$	$R.\begin{cases} x=-\frac{9}{8} \\ y=-\frac{9}{8} \end{cases}$	$\begin{cases} x+y=2 \\ y\frac{x}{y}+3=4 \end{cases}$	$\mathrm{R.}\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$
8	$\begin{cases} \frac{x}{3}-\frac{y}{2}=0 \\ \frac{y(y-x-1)}{y+1}+x-y+1=\frac{1}{2} \end{cases}$			R. impossibile
9	$\begin{cases} \frac{3x-7y+1}{4x^2-9y^2}=\frac{4}{18y^2-8x^2} \\ \frac{4(1-3x)^2}{2}-y=\frac{(12x-5)(6x-y)}{4}+3xy+2 \end{cases}$			$\mathrm{R.}\begin{cases} x=-\frac{3}{17} \\ y=\frac{6}{17} \end{cases}$
10	$\begin{cases} \frac{2x-3y}{x-2y}-\frac{3y-1}{x+5y}=\frac{2(x^2+2xy)-(3y-2)^2}{x^2+3xy-10y^2} \\ x+y=-19 \end{cases}$			$\mathrm{R.}\begin{cases} x=-18 \\ y=-1 \end{cases}$
11	$\begin{cases} \frac{x-3}{x-3y+1}+\frac{xy-y}{x-3y-1}=\frac{x^2-3xy+x^2y-3xy^2+3y^2}{x^2+9y^2-6xy-1} \\ \frac{x-3}{5y-1}-\frac{y-3}{1+5y}=\frac{x+5y^2-5xy+2}{1-25y^2} \end{cases}$			$\mathrm{R.}\begin{cases} x=\frac{7}{4} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$
12	$\begin{cases} \frac{x-2y}{x^2-xy-2y^2}-\frac{1}{y}=2 \\ \frac{4}{y}-\frac{5}{x+y}=-9 \end{cases}$			$\mathrm{R.}\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$
13	$\begin{cases} 2x-y-11=0 \\ \frac{y+1}{x-1}+\frac{3-y}{5x-5}-\frac{2}{3}=0 \end{cases}$			
14	$\begin{cases} \frac{x+1}{x}=\frac{y+2}{y-2} \\ \frac{3x-1}{3x-2}=\frac{1+y}{y-2} \end{cases}$			
15	$\begin{cases} \frac{2}{5x-y}=\frac{-3}{5y-x} \\ \frac{1}{4x-3y}=\frac{2x+y-1}{3y-4x} \end{cases}$			
16	$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{x-\sqrt{2}}+\frac{2\sqrt{2}}{y-\sqrt{3}}= \\ \frac{1}{x-\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{6}}{2y+2\sqrt{2}}= \end{cases}$			

17 $\begin{cases} \frac{x-y+1}{x+y-1} = 2 \\ \frac{x+y+1}{x-y-1} = -2 \end{cases}$

18 $\begin{cases} \frac{2}{x-2} = \frac{3}{y-3} \\ \frac{1}{y+3} = \frac{-1}{2-x} \end{cases}$

►1. Sistemi letterali

DEFINIZIONE. Si chiama **sistema letterale** il sistema in cui oltre alle incognite, solitamente indicate con x e y, compaiono altre lettere dette parametri.

Distinguiamo tre casi distinti di discussione

A. Le equazioni sono lineari e il parametro si trova solo al numeratore

Esempio

▯ $\begin{cases} 2ax-(a-1)y=0 \\ -2x+3y=a \end{cases}$

E' un sistema letterale in quanto, reso in forma canonica, presenta un parametro nei suoi coefficienti. Esso è lineare, pertanto la coppia soluzione, se esiste, dipenderà dal valore del parametro.
Per **discussione del sistema letterale** s'intende l'analisi e la ricerca dei valori che attribuiti al parametro rendono il sistema determinato (in tal caso si determina la soluzione) ma anche scartare i valori del parametro per cui il sistema è impossibile o indeterminato.
Per discutere il sistema usiamo il metodo di Cramer.

- 1° passo: calcoliamo il determinante del sistema: $D=\begin{vmatrix} 2a & -(a-1) \\ -2 & 3 \end{vmatrix}=4a+2$
- 2° passo: determiniamo il valore del parametro che rende D diverso da zero: $4a+2\neq 0 \rightarrow a\neq 0-\frac{1}{2}$. Se $a\neq -\frac{1}{2}$il sistema è determinato.
- 3° passo: calcoliamo i determinanti D_x e D_y per trovare la coppia soluzione$D_x=\begin{vmatrix} 0 & -(a-1) \\ a & 3 \end{vmatrix}=a\cdot(a-1)$$D_y=\begin{vmatrix} 2a & 0 \\ -2 & a \end{vmatrix}=2a^2 \rightarrow x=\frac{a\cdot(a-1)}{4a+2}; y=\frac{2a^2}{4a+2}$
- 4° passo: Il determinante è nullo se $a=-\frac{1}{2}$**;** poiché per questo valore di a i determinanti D_x e D_y sono diversi da zero si ha che per $a=-\frac{1}{2}$il sistema è impossibile.

Riassumendo si ha:

Condizioni sul parametro	Insieme Soluzione	Sistema
$a\neq -\frac{1}{2}$	$I.S=\left\{\frac{a\cdot(a-1)}{4a+2};\frac{2a^2}{4a+2}\right\}$	determinato
$a=-\frac{1}{2}$	$I.S.=\emptyset$	impossibile

B. Il parametro compare al denominatore in almeno una equazione del sistema

Esempio

▯ $\begin{cases} \frac{y+a}{3}-\frac{a-x}{a-1}=a \\ \frac{x+2a}{a}-3=\frac{y}{2}-a \end{cases}$

Il sistema non è fratto pur presentando termini frazionari nelle sue equazioni; la presenza del parametro al denominatore ci obbliga ad escludere dall'insieme R quei valori che annullano il denominatore.
Se $a=1$oppure $a=0$ciascuna equazione del sistema è priva di significato, pertanto lo è anche il sistema.
Con le condizioni di esistenza $C.E.\, a\neq 1 e a\neq 0$possiamo ridurre allo stesso denominatore ciascuna equazione e condurre il sistema alla forma canonica: $\begin{cases} 3x+(a-1)y=2a^2+a \\ 2x-ay=2a-2a^2 \end{cases}$

- 1° passo: calcoliamo il determinante del sistema: $D=\begin{vmatrix} 3 & (a-1) \\ 2 & -a \end{vmatrix}=2-5a$
- 2° passo: determiniamo il valore del parametro che rende D diverso da zero: $2-5a\neq 0 \rightarrow a\neq \frac{2}{5}$ Se $a\neq \frac{2}{5}$il sistema è determinato.
- 3° passo: calcoliamo i determinanti D_x e D_y per trovare la coppia soluzione

$D_x = \begin{vmatrix} 2a^2+a & -(a-1) \\ 2a-2a^2 & 3 \end{vmatrix} = a\cdot(2a-5), D_y = \begin{vmatrix} 3 & 2a^2+a \\ 2 & 2a-2a^2 \end{vmatrix} = 2a\cdot(2-5a) x = \dfrac{a\cdot(2-5a)}{2-5a}; y = \dfrac{2a\cdot(2-5a)}{2-5a}$ e semplificando $(a; 2a)$

- 4° passo: Il determinante è nullo se $a = \frac{2}{5}$**;** poiché anche i determinanti D_x e D_y si annullano si ha

Se $a = \frac{2}{5}$ il sistema è indeterminato.

Riassumendo si ha:

Condizioni sul parametro	Insieme Soluzione	Sistema
$a = 0 \vee a = 1$		privo di significato
$a \neq \frac{2}{5}$ **e** $a \neq 1$ e $a \neq 0$	$I.S = \{(a; 2a)\}$	determinato
$a = \dfrac{2}{5}$	$I.S. = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$	indeterminato

C. Il sistema è frazionario

Esempio

$\begin{cases} \frac{y-a}{x} = \frac{2}{a} \\ x+y=1 \end{cases}$

Il sistema letterale è fratto e nel denominatore oltre al parametro compare l'incognita x:

Se $a = 0$ la prima equazione, e di conseguenza tutto il sistema, è privo di significato; per poter procedere alla ricerca dell'**I**nsieme **S**oluzione poniamo sul parametro la condizione di esistenza $C.E.\ a \neq 0$. (*)

Essendo fratto dobbiamo anche stabilire il Dominio del sistema $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} | x \neq 0\}$(**)

- 1° passo: portiamo nella forma canonica: $\begin{cases} -2x+ay=a^2 \\ x+y=1 \end{cases}$ con $a \neq 0$ e $x \neq 0$
- 2° passo: calcoliamo il determinante del sistema: $D = \begin{vmatrix} -2 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2-a = -(2+a)$
- 3° passo: determiniamo il valore del parametro che rende D diverso da zero: $-2-a \neq 0 \rightarrow a \neq -2$

Se $a \neq -2$ il sistema è determinato.

- 4° passo: calcoliamo i determinanti D_x e D_y per trovare la coppia soluzione

$D_x = \begin{vmatrix} a^2 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a\cdot(a-1) D_y = \begin{vmatrix} -2 & a^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2-a^2 = -(2+a^2) \rightarrow x = -\dfrac{a\cdot(a-1)}{2+a}; y = \dfrac{a^2+2}{2+a}$

è la coppia soluzione accettabile se $x = -\frac{a\cdot(a-1)}{2+a} \neq 0$ per quanto stabilito in (**); essendo $a \neq 0$ per la (*) la coppia soluzione è accettabile se $a \neq 1$.

- 5° passo: il determinante D è nullo se $a = -2$; essendo i determinanti D_x e D_y diversi da zero si ha: se $a = -2$ il sistema è impossibile.

Riassumendo si ha:

Condizioni sul parametro	Condizioni sulle incognite	Insieme Soluzione	Sistema
	$x \neq 0$		
$a = 0$			privo di significato
$a \neq -2$ e $a \neq 0$		$I.S = \left\{-\dfrac{a\cdot(a-1)}{2+a}; \dfrac{a^2+2}{2+a}\right\}$	determinato
$a \neq -2$ e $a \neq 0$ e $a \neq 1$		accettabile	
$a = -2$			impossibile

1 Risolvere e discutere il sistema: $\begin{cases} x+ay=2a \\ \frac{x}{2a}+y=\frac{3}{2} \end{cases}$; per quali valori di a la coppia soluzione è formata da numeri reali positivi? [R. a>0]

2 Perché se il sistema $\begin{cases} 3x-2y=0 \\ \frac{2x-y}{x+1} = \frac{1}{a} \end{cases}$ è determinato la coppia soluzione è accettabile?

3 Nel sistema $\begin{cases} \frac{a-x}{a^2+a} + \frac{y-2a}{a+1} = -1 \\ 2y = x \end{cases}$ è vero che la coppia soluzione è formata da numeri reali positivi se $a > 2$?

4 Spiegate perché non esiste alcun valore di a per cui la coppia (0;2) appartenga a I.S. del sistema: $\begin{cases} 3x-2y=0 \\ \frac{2x-y}{x+1}=\frac{1}{a} \end{cases}$

5 Nel sistema $\begin{cases} \frac{y}{x}-\frac{y-a}{3}=\frac{1-y}{3} \\ a(x+2)+y=1 \end{cases}$ determinate i valori da attribuire al parametro a affinché la coppia soluzione accettabile sia formata da numeri reali positivi. $\left[R. -\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}\right]$

6 $\begin{cases} x+ay=2a \\ \frac{x}{2a}+y=\frac{3}{2} \end{cases}$ R.$a\neq 0 \rightarrow (a;1)$

7 $\begin{cases} \frac{x^3-8}{x-2}=x^2-3x+y-2 \\ \frac{x^2-4xy+3y^2}{3y-x}=k \end{cases}$ R. *Il sistema è determinato per* $k\neq 14, k\neq \frac{6}{7}$ *e le soluzioni sono* $\begin{cases} x=\frac{k-6}{4} \\ y=\frac{5k-6}{4} \end{cases}$; *se* $k=14 \vee k=\frac{6}{7}$ *il sistema è impossibile.*

8 $\begin{cases} kx-y=2 \\ x+6ky=0 \end{cases}$ R. *Il sistema è determinato per ogni k e le soluzioni sono* $\begin{cases} x=\frac{12k}{6k^2+1} \\ y=-\frac{2}{6k^2+1} \end{cases}$

9 $\begin{cases} kx-8y=4 \\ 2x-4ky=3 \end{cases}$ R. *Se* $k\neq -2, k\neq 2$ *il sistema è determinato e le soluzioni sono* $\begin{cases} x=\frac{4k-6}{k^2-4} \\ y=\frac{8-3k}{4(k^2-4)} \end{cases}$; *se* $k=-2 \vee k=2$ *il sistema è impossibile*

10 $\begin{cases} 4x-k^2y=k \\ kx-4ky=-3k \end{cases}$ R. *Se* $k\neq -4, k\neq 4, k\neq 0$ *il sistema è determinato e le soluzioni sono* $\begin{cases} x=\frac{3k^2+4k}{16-k^2} \\ y=\frac{k+12}{16-k^2} \end{cases}$; *se* $k=-4 \vee k=4$ *il sistema è impossibile; se* $k=0$ *il sistema è indeterminato e le soluzioni sono del tipo* $\begin{cases} x=0 \\ y=t \end{cases}$ *con t reale.*

11 $\begin{cases} kx-4ky=-6 \\ kx-k^2y=0 \end{cases}$ R. *Se* $k\neq 0, k\neq 4$ *il sistema è determinato e le soluzioni sono* $\begin{cases} x=\frac{6}{4-k} \\ y=\frac{6}{k(4-k)} \end{cases}$; *se* $k=0 \vee k=4$ *il sistema è impossibile.*

12 $\begin{cases} (k-1)x+(1-k)y=0 \\ (2-2k)x+y=-1 \end{cases}$ R. S*e* $k\neq 1, k\neq \frac{3}{2}$ *il sistema è determinato e le soluzioni sono* $\begin{cases} x=\frac{1}{2k-3} \\ y=\frac{1}{2k-3} \end{cases}$; *se* $k=\frac{3}{2}$ *il sistema è impossibile; se* $k=1$ *il sistema è indeterminato e le soluzioni sono del tipo* $\begin{cases} x=t \\ y=-1 \end{cases}$.

►1. Sistemi lineari di tre equazioni in tre incognite

Problema

Determinare tre numeri reali x, y, z (nell'ordine) tali che il doppio del primo uguagli l'opposto del secondo, la differenza tra il primo e il triplo del terzo sia nulla e la somma del secondo con il terzo supera il primo di 4 unità.

Formalizziamo le condizioni espresse nel testo attraverso equazioni lineari:

- il doppio del primo uguagli l'opposto del secondo → $2x=-y$
- la differenza tra il primo e il triplo del secondo sia nulla → $x-3z=0$
- la somma del secondo con il terzo supera il primo di 4 unità → $y+z=x+4$

Le tre condizioni devono essere vere contemporaneamente, quindi i tre numeri sono la terna soluzione del sistema di primo grado $\begin{cases}2x=-y\\ x-3z=0\\ y+z=x+4\end{cases}$ di tre equazioni in tre incognite.

Puoi ricavare la y dalla prima equazione e sostituire nelle altre due $\begin{cases}y=-2x\\ x-3z=0\\ -2x+z=x+4\end{cases}$ da cui $\begin{cases}y=-2x\\ x-3z=0\\ -3x+z=4\end{cases}$

Dalla seconda equazione ricaviamo x in funzione di z $\begin{cases}y=-2x\\ x=3z\\ -3x+z=4\end{cases}$

Sostituiamo il valore di x nell'ultima equazione $\begin{cases}y=-2x\\ x=3z\\ -3(3\text{z})+z=4\end{cases}$

Risolviamo l'ultima equazione che è di primo grado in una sola incognita $\begin{cases}y=-2x\\ x=3z\\ z=-\frac{4}{8}=-\frac{1}{2}\end{cases}$

Sostituiamo il valore ottenuto di z nella seconda equazione $\begin{cases}y=-2x\\ x=3-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}\\ z=-\frac{4}{9}\end{cases}$

Infine sostituiamo il valore ottenuto di x nella prima equazione $\begin{cases}y=3\\ z=-\frac{1}{2}\\ x=-\frac{3}{2}\end{cases}$

□ $\begin{cases}3x+y-z=7\\ x+3y+z=5\\ x+y-3z=3\end{cases}$

Procediamo con il metodo di riduzione. Sommiamo le prime due equazioni: $4x+4y=12$

Moltiplichiamo la seconda equazione per 3 e sommiamo con la terza:

$3(x+3\text{y}+z)+x+y=3\cdot 5+3=4\text{x}+10\text{y}=18$

Costruiamo il sistema di queste due equazioni nelle sole due incognite x e y: $\begin{cases}4x+4y=12\\ 4x+10y=18\end{cases}$

Moltiplichiamo la seconda equazione per –1 e sommiamo le due equazioni: $\begin{cases}4x+4y=12\\ -4x-10y=-18\end{cases}\rightarrow$

$\begin{cases}4x+4y=12\\ -4x-10y+4\text{x}+4\text{y}=-18+12\end{cases}\rightarrow\begin{cases}4x+4y=12\\ -6y=-6\rightarrow y=1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases}$

Sostituendo nella prima equazione del sistema ricaviamo la terza incognita: $\begin{cases}x=2\\ y=1;\\ z=0\end{cases}$

la terna soluzione del sistema assegnato è $(2;1;0)$.

Determinare la terna di soluzione dei seguenti sistemi

1 $\begin{cases}x-2y+z=1\\ x-y=2\\ x+3y-2z=0\end{cases}$ R.(0; -2; 3) $\begin{cases}x+y+z=4\\ x-3y+6z=1\\ x-y-z=2\end{cases}$ $R.\,3;\frac{8}{9};\frac{1}{9}$

2 $\begin{cases}x+2y-3z=6-3y\\ 2x-y+4z=x\\ 3x-z=y+2\end{cases}$ R.(1; 1;0) $\begin{cases}2\text{x}-y+3z=1\\ x-2y+z=5\\ x+2z=3\end{cases}$ R:(-21, -7, 12)

3 $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ y-4z=0 \\ x-2y+z=2 \end{cases}$ $R.\frac{3}{2};-\frac{2}{7};-\frac{1}{14}$ $\begin{cases} x-3y+6z=1 \\ x+y+z=5 \\ x+2z=3 \end{cases}$ R.(-5; 6; 4)

4 $\begin{cases} x-4y+6z=2 \\ x+4y-z=2 \\ x+3y-2z=2 \end{cases}$ R.(2; 0; 0) $\begin{cases} 4x-y-2z=1 \\ 3x+2y-z=4 \\ x+y+2z=4 \end{cases}$ R.(1; 1; 1)

5 $\begin{cases} x-3y=3 \\ x+y+z=-1 \\ 2x-z=0 \end{cases}$ R.(0; -1; 0) $\begin{cases} 2x-y+3z=1 \\ x-6y+8z=2 \\ 3x-4y+8z=2 \end{cases}$ $R.\frac{2}{3};-\frac{2}{3};-\frac{1}{3}$

6 $\begin{cases} 4x-6y-7z=-1 \\ x+y-z=1 \\ 3x+2y+6z=1 \end{cases}$ $\frac{9}{31};\frac{17}{31};-\frac{5}{31}$ $\begin{cases} 4x-3y+z=4 \\ x+4y-3z=2 \\ y-7z=0 \end{cases}$ $R.\frac{7}{6};\frac{7}{30};\frac{1}{30}$

7 $\begin{cases} 3x-6y+2z=1 \\ x-4y+6z=5 \\ x-y+4z=10 \end{cases}$ R.(5; 3; 2) $\begin{cases} 4x-y-7z=-12 \\ x+3y+z=-4 \\ 2x-y+6z=5 \end{cases}$ $-\frac{60}{43};-\frac{53}{43};\frac{47}{43}$

8 $\begin{cases} 2x+y-5z=2 \\ x+y-7z=-2 \\ x+y+2z=1 \end{cases}$ $\frac{10}{3};-3;\frac{1}{3}$ $\begin{cases} 3x-y+z=-1 \\ x-y-z=3 \\ x+y+2z=1 \end{cases}$ R.(6; 11; -8)

9 $\begin{cases} x-4y+2z=7 \\ -3x-2y+3z=0 \\ x-2y+z=1 \end{cases}$ $-5;-\frac{33}{4};-\frac{21}{2}$ $\begin{cases} -2x-2y+3z=4 \\ 2x-y+3z=0 \\ 2x+y=1 \end{cases}$ $-\frac{5}{2};6;\frac{11}{3}$

10 Quale condizione deve soddisfare il parametro *a* affinché il sistema $\begin{cases} x+y+z=\frac{a^2+1}{a} \\ ay-z=a^2 \\ y+ax=a+1+a^2z \end{cases}$ non sia privo di significato? Determina la terna soluzione assegnando ad a il valore 2.

11 Determina il dominio del sistema e stabilisci se la terna soluzione è accettabile: $\begin{cases} \frac{5}{1-x}+\frac{3}{y+2}=\frac{2x}{xy-2+2x-y} \\ \frac{x+1-3(y-1)}{xyz}=\frac{1}{xy}-\frac{2}{yz}-\frac{3}{xz} \\ x+2y+z=0 \end{cases}$

12 Verifica se il sistema è indeterminato $\begin{cases} x+y=1 \\ y-z=5 \\ x+z+2=0 \end{cases}$

13 Determina il volume del parallelepipedo retto avente per base un rettangolo, sapendo che le dimensioni della base e l'altezza hanno come misura (rispetto al cm) i valori di x, y, z ottenuti risolvendo il sistema $\begin{cases} 3x+1=2y+3z \\ 6x+y+2z=7 \\ 9(x-1)+3y+4z=0 \end{cases}$

►1. Sistemi da risolvere con sostituzioni delle variabili

Alcuni sistemi possono essere ricondotti a sistemi lineare per mezzo di sostituzioni nelle variabili.

 $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{2}{y}=3 \\ \frac{2}{x}-\frac{4}{y}=-1 \end{cases}$

Con la seguente sostituzione di varibili (*) $\begin{cases} u=\frac{1}{x} \\ v=\frac{1}{y} \end{cases}$ il sistema diventa $\begin{cases} u+2\mathrm{v}=3 \\ 2\mathrm{u}-4\mathrm{v}=-1 \end{cases}$.

Per risolverlo possiamo moltiplicare per 2 la prima equazione $\begin{cases} 2\mathrm{u}+4\mathrm{v}=6 \\ 2\mathrm{u}-4\mathrm{v}=-1 \end{cases}$

Sommando membro a membro abbiamo $4\mathrm{u}=5$dalla quale possiamo determinare $u=\frac{5}{4}$.

Per ricavare l'incognita v moltiplichiamo la prima equazione per -2, otteniamo $\begin{cases} -2\mathrm{u}-4\mathrm{v}=-6 \\ 2\mathrm{u}-4\mathrm{v}=-1 \end{cases}$

Sommando membro a membro abbiamo $-8\mathrm{v}=-7$da cui $v=\frac{7}{8}$.

Avendo trovato i valori delle incognite *u* e *v* possiamo ricavare x e y sostituire i valori trovati in (*):

$\begin{cases} \frac{5}{4}=\frac{1}{x} \\ \frac{7}{8}=\frac{1}{y} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\frac{4}{5} \\ y=\frac{8}{7} \end{cases}$.

Risolvi i seguenti sistemi per mezzo di opportune sostituzioni delle variabili

1	$\begin{cases}\frac{1}{2x}+\frac{1}{y}=-4\\ \frac{2}{3x}+\frac{2}{y}=1\end{cases}$ sostituire $u=\frac{1}{x}; v=\frac{1}{y}$	R. $-\frac{1}{27};\frac{2}{19}$
2	$\begin{cases}\frac{5}{2x}-\frac{2}{y}=2\\ \frac{1}{x}+\frac{2}{y}=1\end{cases}$	R. $\frac{7}{6}; 14$
3	$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=3\\ \frac{1}{x}+\frac{3}{y}=4\end{cases}$	R. $1; 1$
4	$\begin{cases}\frac{2}{x}+\frac{4}{y}=-3\\ \frac{2}{x}-\frac{3}{y}=4\end{cases}$	R. $2; -1$
5	$\begin{cases}\frac{1}{x+1}-\frac{2}{y-1}=2\\ \frac{2}{x+1}-\frac{1}{y-1}=3\end{cases}$	R. $-\frac{1}{4}; -2$
6	$\begin{cases}\frac{1}{x}-\frac{3}{y}+\frac{2}{z}=3\\ \frac{2}{x}-\frac{3}{y}+\frac{2}{z}=4\\ \frac{2}{x}+\frac{4}{y}-\frac{1}{z}=-3\end{cases}$	R. $1; -\frac{5}{8}; -\frac{5}{7}$
7	$\begin{cases}x^3+y^3=9\\ 2x^3-y^3=-6\end{cases}$	R.$(1; 2)$
8	$\begin{cases}x^2+y^2=13\\ x^2-y^2=5\end{cases}$ sostituire $u=x^2; v=y^2$	R. $(3; 2), (-3; 2), (3; -2), (-3; -2)$
9	$\begin{cases}x^2+y^2=-1\\ x^2-3y^2=12\end{cases}$	Nessuna soluzione reale
10	$\begin{cases}\frac{4}{x^2}-\frac{2}{y^2}-\frac{2}{z^2}=0\\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{z^2}=2\\ \frac{2}{y^2}-\frac{2}{z^2}=0\end{cases}$	R. $(1; 1; 1), (-1; 1; 1), (1; -1; 1), (1; 1; -1),$ $(-1; -1; 1); (-1; 1; -1),$ $(1; -1; -1), (-1; -1; -1)$
11	$\begin{cases}\frac{1}{x+y}+\frac{2}{x-y}=1\\ \frac{3}{x+y}-\frac{5}{x-y}=2\end{cases}$ sostituire $u=\frac{1}{x+y}; v=\ldots$	R. $\frac{55}{9}; -\frac{44}{9}$

►1. Problemi risolvibili con sistemi

1 Determina due numeri sapendo che la loro somma è 37, la loro differenza è 5.

2 Il doppio della somma di due numeri è uguale al secondo numero aumentato del triplo del primo, inoltre aumentando il primo numero di 12 si ottiene il doppio del secondo diminuito di 6. [18*; 18*]

3 Determina tre numeri la cui somma è 81. Il secondo supera il primo di 3. Il terzo numero è dato dalla somma dei primi due. [18,75; 21,75; 40,5]

4 Determina due numeri sapendo che la loro somma è pari al doppio del primo aumentato di 1/4 del secondo, la loro differenza è pari a 1/3 del primo. [*27; 36*]

5 Determina due numeri la cui somma è 57 e di cui si sa che il doppio del più grande diminuito della metà del più grande è 49. [*26; 31*]

6 Determina tre numeri si sa che: il triplo del primo lato è uguale al doppio del secondo aumentato di 10m; la differenza tra il doppio del terzo lato e il doppio del secondo lato è uguale al primo lato aumentato di 12; la somma dei primi due lati è uguale al terzo lato. [12, 13, 25]

7 Determina un numero di due cifre sapendo che la cifrà delle dicine è il doppio di quella delle unità e scambiando le due cifre si ottiene un numero più piccolo di 27 del precedente. [63]

8 Determina il numero intero di due cifre di cui la cifra delle decine supera di 2 la cifra delle unità e la somma delle cifrè è 12. [75]

9 * Determina due numeri naturali il cui quoziente è 5 e la cui differenza è 12.

10 * Determinare un numero naturale di due cifre sapendo che la loro somma è 12 e che, invertendole, si ottiene un numero che supera di 6 la metà di quello iniziale. [84]

11 * Determinare la frazione che diventa uguale a 5/6 aumentando i suoi termini di 2 e diventa 1/2 se i suoi termini diminuiscono di 2.

12 * La somma delle età di due coniugi è 65 anni; un settimo dell'età del marito è uguale ad un sesto dell'età della moglie. Determinare le età dei coniugi. [35, 30]

13 * Un numero naturale diviso per 3 dà un certo quoziente e resto 1. Un altro numero naturale, diviso per 5, dà lo stesso quoziente e resto 3. Sapendo che i due numeri hanno per somma 188, determinali e calcola il quoziete. [70, 118, 23]

14 Giulio e Giulia hanno svuotato i loro salvadanai per comparsi una bici. Nel negozio c'è una bella bici che piace a entrambi, costa 180€ e nessuno dei due ha i soldi sufficienti per comprarla. Giulio dice: "Se mi dai la metà dei tuoi soldi compro io la bici". Giulia ribatte: "se mi dai la terza parte dei tuoi soldi la bici la compro io". Quanti soldi hanno rispettivamente Giulio e Giulia? [108; 144]

15 A una recita scolastica per beneficienza vengono incassati 216€ per un totale di 102 biglietti venduti. I ragazzi della scuola pagano 1€, i ragazzi che non sono di quella scuola pagano 1,5€, gli adulti pagano 3€. Quanti sono i ragazzi della scuola che hanno assisitto alla recita?

16 Da un cartone quadrato di lato 12cm, si taglia prima una scriscia parallela a un lato e di spessore non noto, poi si taglia dal lato adiacente una striscia parallela al lato spessa 2 cm in più rispetto alla striscia precedente. Sapendo che il perimetro del rettangolo rimasto è 33,6cm, calcola l'area del rettangolo rimasto.

17 Al bar per pagare 4 caffè e 2 cornetti si spendono €4,60, per pagare 6 caffé e 3 cornetti si spendono €6,90. E' possibile determinare il prezzo del caffé e quello del cornetto? [*indeterminato*]

18 Al bar Mario offre la colazione agli amici perché è il suo compleano: per 4 caffé e 2 cornetti paga €4,60. Subito dopo arrivano tre altri amici che prendono un caffè e un cornetto ciascuno, questa volta paga €4,80. Quanto costa un caffé e quanto un cornetto? [0,7 e 0,9]

19 Un cicloturista percorre 218km in tre giorni. Il secondo giorno percorre il 20% in più del primo giorno. Il terzo giorno percorre 14km in più del secondo giorno. Qual è stata la lunghezza delle tre tappe? [*60; 72; 86*]

20 In un parcheggio ci sono moto e auto. In tutto si contano 43 mezzi e 140 ruote. Quante sono le auto e quante le moto? [*27, 16*]

21 Luisa e Marisa sono due sorella. Marisa, la più grande è nata 3 anni prima della sorella; la somma dele loro età è 59. Qual è l'età delle due sorelle?

22 Mario e Lucia hanno messo da parte del denaro. Lucia ha 5 € in più di Mario. Complessivamente potrebbero comprare 45 euro di schede prepagate per i cellulari. Quanto possiede Mario e quanto possiede Lucia?

23 Una macchina per giaccio produce 10 cubetti di giaccio al minuto, mentre una seconda macchina per giacchio produce 7 cubetti al minuto. Sapendo che in tutto sono stati prodotti 304 cubetti e che complessivamente le macchine hanno lavorato per 22 minuti, quanti cubetti ha prodotto la prima macchina e quindi ne ha prodotti la seconda.

24 In un parcheggio ci sono automobili, camion e moto, in tutto 62 mezzi. Le auto hanno 4 ruote, i camion ne hanno 6 e le moto ne hanno 2. In totale le ruote sono 264. Il numero delle ruote delle auto è uguale al numero delle ruote dei camion. Determina quante auto, quanti camion e quante moto ci sono nel parcheggio. [30; 20; 12]

25 Un vasetto di marmellata pesa 780 g. Quando nel vasetto rimane metà marmellata, il vasetto pesa 420g. Quanto pesa il vasetto vuoto?

26 Una gelateria prepara per la giornata di Ferragosto 30 kg di gelato. Vende i coni da due palline a1,50€ e i coni da tre palline a 2,00€. Si sa che da 2kg di gelatosi fanno 25 palline di gelato. A fine giornata ha venduto tutto il gelato e ha incassato 387,50€. Quanti coni da due palline ha venduto? [130]

27 Marco e Luca sono fratelli. La somma delle loro età è 23 anni. Il doppio dell'età di Luca è uguale alla differenza tra l'età del loro padre e il triplo dell'età di Marco. Quando Luca è nato, il padre aveva 43 anni. Determina l'età di Marco e di Luca (*Prove Invalsi 2004-2005*)

28 Oggi Angelo ha un quarto dell'età di sua madre. Quando avrà 18 anni, sua madre avrà il triplo della sua età. Quanti anni hanno attualmente i due? (*Giochi d'autunno 2010, Centro Pristem*)

29 Pietro e Paolo festeggiano il loro onomastico in pizzeria con i loro amici. Alla fine della cena il conto viene diviso in parti uguali tra tutti i presenti e ciascuno dovrebbe pagare 12 euro. Con grande generosità però gli amici decidono di offrire la cena a Pietro e Paolo; il conto viene nuovamente diviso in parti uguali tra gli amici di Pietro e Paolo (cioè tutti i presenti esclusi Pietro e Paolo), e ciascuno di loro paga 16 euro. Quanti sono gli amici di Pietro e Paolo? (*Giochi di Archimede, 2008*)

30 Al bar degli studenti, caffè e cornetto costano €1,50; cornetto e succo di frutta costano €1,80, caffè e succo di frutta costano €1,70. Quanto costano in tutto 7 caffè, 5 cornetti e 3 succhi di frutta? [*€11,90*]

31 * Un negozio ha venduto scatole contenenti 6 fazzoletti ciascuna ed altre contenenti 12 fazzoletti ciascuna, per un totale di 156 fazzoletti. Il numero delle confezioni da 12 ha superato di 1 la metà di quello delle confezioni da 6. Quante confezioni di ogni tipo si sono vendute?

32 * Nella città di Non fumo gli unici negozi sono tabaccherie e latterie. L'anno scorso le tabaccherie erano i 2/3 delle latterie; quest'anno due tabaccherie sono diventate latterie cosicché ora le tabaccherie sono i 9/16 delle latterie. Dall'anno scorso a quest'anno il numero cimplessivo dei negozi di Non fumo è rimasto lo stesso. Quante latterie c'erano l'anno scorso a Nonfumo? [30]

33 Un rettangolo di perimetro 80cm ha la base che è i 2/3 dell'altezza. Calcolare l'area del rettangolo.

34 Un trapezio isoscele ha il perimetro di 72cm. La base minore è i 3/4 della base maggiore; il lato obliquo è pari alla somma dei 2/3 della base minore con i 3/2 della base maggiore. Determina le misure delle basi del trapezio. $\left[\frac{288}{23}cm; \frac{216}{23}cm\right]$

35 Calcola l'area di un rombo le cui diagonali sono nel rapporto 3/2. Si sa che la differenza tra le due diagonali è 16cm. $[1536cm^2]$

36 In un triangolo rettangolo i 3/4 dell'angolo acuto maggiore sono pari ai 24/13 dell'angolo acuto minore. Determinare l'ampiezza degli angoli. [*26°; 64°*]

37 In un triangolo, un angolo supera di 16° un secondo angolo; il terzo angolo è pari ai 29/16 della somma dei primi due. Determina le misure degli angoli del triangolo. [24°; 40°; 116°]

38 In un rettangolo di perimetro 120cm, la base è 2/3 dell'altezza. Calcola l'area del rettangolo. [*864*]

39 Determina le misure dei tre lati x, y, z di un triangolo sapendo che il perimetro è 53cm, inoltre la misura z differisce di 19cm dalla somma delle altre due misure e che la misura x differisce di 11cm dalla differenza tra y e z.

40 Aumentando la base di un rettangolo di 5cm e l'altezza di 12cm, si ottiene un rettangolo di perimetro 120cm che è più lungo di 12cm del perimetro del rettangolo iniziale. [impossibile]

41 In un triangolo isoscele di perimetro 64cm, la differenza tra la base e la metà del lato obliquo è 4cm. Determina la misura della base e del lato obliquo del triangolo. [*16cm, 24cm*]

42 Un segmento AB di 64cm viene diviso da un suo punto P in due parti tali che il triplo della loro differenza è uguale al segmento minire aumentato di 20cm. Determina le misure dei due segmenti in cui resta diviso AB dal punto P. [*7cm; 16cm*]

Gli esercizi indicati con * sono tratti da Matematica 2, Dipartimento di Matematica, ITIS V.Volterra, San Donà di Piave, Versione [11-12] [S-A11], pagg. 53; licenza CC, BY-NC-BD, per gentile concessione dei proff. che hanno reddatto il libro. Il libro è scaricabile da http://www.istitutovolterra.it/dipartimenti/matematica/dipmath/docs/M2_1112.pdf

Autori
Anna Cristina Mocchetti: teoria, esercizi
Claudio Carboncini: integrazioni, editing
Antonio Bernardo: coordinatore, esercizi
Francesco Daddi: esercizi
Germano Pettarin: esercizi
Erasmo Modica: integrazioni, esercizi
Gemma Fiorito: correzioni
Nicola De Rosa: correzioni, esercizi
Lucia Rapella: correzioni

Collaborazione, commenti e suggerimenti
Se vuoi contribuire anche tu alla stesura e aggiornamento del manuale Matematica C3, o se vuoi inviare dei commenti e/o suggerimenti scrivi a antoniobernardo@matematicamente.it

Versione del documento
Versione 3.1 del 26.05.2012