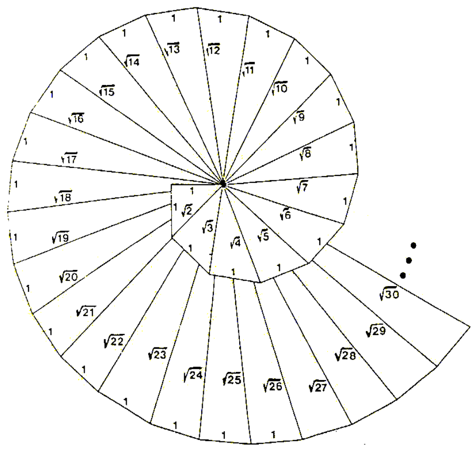
L'arrivo di ogni nuovo tipo di numero scopre un nuovo orizzonte,
una nuova terra da conquistare, da colonizzare con il nostro pensiero.

Anna Cerasoli

LA CRISI DEGLI IRRAZIONALI

Fin dai suoi inizi, nel secondo millennio a.C., la civiltà greca assimilò le conoscenze matematiche in maniera molto originale, facendo loro assumere una forma completamente diversa. La matematica greca raggiunse grandi livelli, durante il VI secolo a.C., con due figure leggendarie: Pitagora di Samo e Talete di Mileto, che ebbero la possibilità di fare viaggi nei centri del sapere antico, dove acquisirono notevoli conoscenze. Secondo qualche leggenda, Pitagora è stato discepolo di Talete, ma per età differivano di mezzo secolo, perciò è inverosimile.
Prima del loro lavoro, mancava la struttura concettuale della matematica, che era usata solo per fini pratici. Sembra che Talete per primo abbia posto le prime basi teoriche. Secondo Eudemo e Proclo, la nuova direzione presa dalla matematica è dovuta principalmente ai pitagorici, per i quali la matematica era studiata soprattutto per l'amore per la scienza e non per le esigenze della vita pratica.

Per quanto i personaggi leggendari nell'antica Grecia siano numerosi, ben pochi possono paragonarsi a Pitagora e numerose e discordanti sono le notizie che riguardano la sua vita. La nascita a Samo è ragionevolmente accertata, come pure i suoi contatti con i saggi dell'oriente. Nato intorno al 580 a.C., giunse in Italia probabilmente intorno al 520.
A Crotone fonda la propria scuola, che può essere considerata una setta, visto che divenne progressivamente sempre più chiusa ed elitaria, tanto che per poterne far parte era necessario affrontare una lunga iniziazione. Pitagora teneva due tipi diversi di lezione: uno per i soli membri della setta e l'altro per coloro che facevano parte della comunità in senso più largo. La società segreta presenta aspetti molto simili ai culti orfici, fatta eccezione per la matematica e la filosofia, che costituiscono la base per la condotta di vita.
Con il tempo, essa ebbe un'enorme influenza sul sistema politico di Crotone, tanto che si venne formando una vera e propria oligarchia, isolata dal resto della popolazione e il malcontento da parte dei cittadini andò aumentando. Con l'insorgere del conflitto tra Crotone e Sibari e la vittoria di Crotone, i contrasti si fecero sempre più accesi.
Secondo Aristosseno, la fine della scuola è da imputarsi all'odio contro Pitagora, da parte di un aspirante respinto, Cilone. I pitagorici vennero cacciati dalla città, mentre secondo altre fonti ci fu un vero e proprio massacro. Pitagora riparò a Metaponto, dove morì, probabilmente verso la fine del secolo, pare dopo un digiuno durato quaranta giorni. In questa città fu così amato che della sua casa venne fatto un tempio a Demetra.
Dopo la sua morte, la figura di Pitagora assunse dimensioni mitiche e gli vennero addirittura imputati dei miracoli! Il problema non sono le leggende di questo tipo, facilmente riconoscibili e sconfessabili, ma il fatto che, dopo la sua morte, tutte le opere e le scoperte vennero attribuite a lui, tanto che è difficile distinguere il suo contributo da quello dei suoi seguaci. A questo si aggiunga la difficoltà data dal fatto che non è stata conservata nessuna opera di Pitagora e non si sa se ne abbia mai scritte.



L'esatta posizione di molti numeri irrazionali si può trovare usando il teorema di Pitagora e disponendo i triangoli in modo da formare un nautilus.

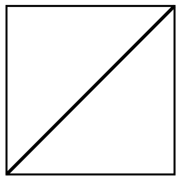
La matematica ebbe un ruolo estremamente importante nella vita dei pitagorici: ogni cosa che ci circonda si può esprimere sotto forma di numero, *Tutto è numero*. Un tempo era diffusa la convinzione che la maggior parte del contenuto dei primi due libri degli *Elementi* di Euclide fosse dovuta ai pitagorici. In realtà, in tempi recenti sono stati sollevati numerosi dubbi al riguardo, visto il carattere primitivo dei concetti dell'aritmetica pitagorica. Per i pitagorici i numeri racchiudevano la loro visione mistica della realtà, ma il misticismo non nacque con loro: parecchie civiltà primitive condividevano diversi aspetti della numerologia.

In Mesopotamia la geometria era consistita essenzialmente nell'applicazione del numero all'estensione nello spazio; sembra che, in un primo momento, si sia verificata la stessa cosa presso i pitagorici, con una diversità però. In Egitto, il numero faceva riferimento alla serie dei numeri naturali e delle frazioni aventi l'unità per numeratore; presso i babilonesi esso aveva rappresentato il campo di tutte le frazioni razionali. In Grecia il termine numero veniva usato soltanto per indicare i numeri interi; una frazione non veniva considerata come una entità unica, ma come un rapporto o una relazione tra due numeri interi.

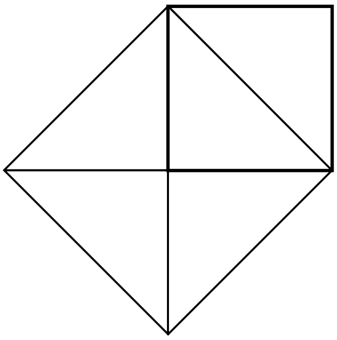
I pitagorici furono i primi a leggere la natura in termini matematici: per loro la matematica era il mezzo per unificare tutti gli aspetti del mondo circostante, la musica, la cosmologia, la filosofia, la religione.

La scoperta degli irrazionali

La scoperta degli irrazionali non è interamente opera dei pitagorici. Una traccia del calcolo di estrazione della radice quadrata è stata trovata in Mesopotamia, mentre i Babilonesi risolvevano il calcolo della radice quadrata con il modo noto oggi con il nome di *algoritmo di Newton*. La prova che il calcolo si possa attribuire ai Babilonesi è nella tavoletta di Yale n. 7289, dove viene determinato il valore di $\sqrt{2}$: in questa tavoletta è riportato anche un disegno che riproduce il rapporto fra la diagonale e il lato del quadrato, perché il teorema di Pitagora era conosciuto molto prima dell'esistenza della scuola pitagorica.
La scoperta degli irrazionali è molto controversa: per qualcuno è indicata da $\sqrt{2}$, è dovuta ad Ippaso e risale al confronto fra la diagonale e il lato del quadrato; per altri studiosi è dovuta al rapporto fra il lato e la diagonale del pentagono regolare e quindi è indicata dalla $\sqrt{5}$.
Si sa per certo che la scoperta dei numeri irrazionali "inesprimibili" (αλόγον) rappresentò ciò che il matematico francese del diciannovesimo secolo Paul Tannery, chiamò un *véritable scandale logique*. È opinione assai diffusa che la scoperta degli irrazionali abbia portato a una crisi o quantomeno a una tensione nelle dottrine pitagoriche, basate in gran parte sulla centralità del numero nell'ordine del cosmo.



La diagonale di un quadrato di lato 1 e il lato stesso sono *incommensurabili*, in quanto non si possono esprimere con la stessa unità di misura. Eppure dalla figura non si avverte l'impossibilità di questo confronto, perché l'incommensurabilità non è una proprietà visibile[1].
La coesistenza di queste due grandezze è la dimostrazione che la realtà è più ricca dei numeri, soprattutto se ci limitiamo ai numeri interi e positivi, esattamente come facevano i pitagorici. Questa crisi minava nel profondo la dottrina pitagorica: tutta la vita della comunità era basata sui numeri, sui numeri interi, nell'assoluta certezza che fossero gli unici numeri possibili. La scoperta dell'esistenza di altri numeri, dovuta alla dimostrazione che $\sqrt{2}$ non è un numero razionale, non poteva che mettere seriamente in crisi la setta. I pitagorici pensavano che i segmenti di retta fossero costituiti da un numero finito di punti-unità indivisibili: la scoperta di grandezze fra loro incommensurabili, cioè prive di un sottomultiplo comune, aveva come logica conseguenza che il punto non poteva avere dimensioni.



La scoperta degli incommensurabili è attribuita a Ippaso di Metaponto e si racconta che i pitagorici *stessero allora solcando il mare su di una nave e che essi abbiano gettato fuori bordo Ippaso per punirlo del fatto di aver introdotto un elemento dell'universo che negava la dottrina pitagorica secondo la quale tutti i fenomeni dell'universo possono essere ridotti a numeri interi o a loro rapporti.*

L'incommensurabilità aprì nuove strade alla matematica classica: se per i pitagorici significò il crollo delle loro credenze, per altri costituì un'occasione per investigare la natura avendo a disposizione nuovi oggetti, che però non furono considerati numeri fino al Rinascimento (1600 circa). Per questo furono chiamati *irrazionali*, in quanto non razionali, cioè non esprimibili in termini di rapporti, visto che tra la diagonale e il lato del quadrato non esiste rapporto. L'idea di numero irrazionale è difficile, anche se siamo abituati a considerare $\sqrt{2}$ un numero come tutti gli altri. *Gli scienziati greci si rifiutavano di considerare il rapporto fra la diagonale e il lato del quadrato un numero come tutti gli altri: facevano ragionamenti e operazioni su tale rapporto, ma sempre sotto forma geometrica, senza farne oggetto di calcolo aritmetico.* Per arrivare all'algebra, all'astrazione che permette di considerare numeri anche gli irrazionali, dovrà passare molto tempo.

Questo avvenne forse anche a causa del contributo dato da Eudosso: nato a Cnido, nell'Asia Minore, intorno al 408 a.C., aveva studiato sotto il pitagorico Archita (428/347 a.C.) a Taranto, viaggiato in Egitto e fondato una scuola a Cizico, nell'Asia Minore settentrionale. Morì intorno al 335 a.C., a Cnido. Ebbe il merito di introdurre il concetto di *grandezza*: alle grandezze non venivano assegnati valori quantitativi e potevano quindi essere riferite anche a entità incommensurabili fra loro. In altre parole, Eudosso evitò di introdurre come numeri gli irrazionali: grazie a lui, i greci compirono enormi progressi in geometria, ma venne favorita una netta separazione tra il numero e la geometria, perché soltanto i geometri potevano maneggiare i rapporti incommensurabili. La geometria divenne quindi la base per quasi tutta la matematica rigorosa e lo sviluppo dell'algebra venne notevolmente ritardato, nonostante Archita avesse sostenuto che solo l'aritmetica poteva fornire dimostrazioni soddisfacenti. Il pensiero matematico venne separato dai bisogni pratici, visto che nei commerci e nelle misurazioni continuava ad esserci la necessità dei numeri, e i matematici non sentirono alcun impulso a migliorare le tecniche aritmetiche e algebriche. Solo nel periodo alessandrino (300 a.C. / 600 d.C. circa), gli uomini colti cominciarono a interessarsi agli affari pratici e si svilupparono l'aritmetica e l'algebra.

[1] Nel dialogo *Menone*, Platone presenta Socrate nell'atto di proporre ad un giovane discepolo un problema di geometria, consistente nel costruire un quadrato di area doppia di un quadrato dato. Il problema è facilmente risolvibile dal punto di vista geometrico, ma non altrettanto avviene dal punto di vista numerico. In altre parole, la geometria si mostra superiore all'aritmetica.

La dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$

La dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$ venne data dai pitagorici stessi e venne inclusa nelle edizioni più antiche degli *Elementi* di Euclide, come proposizione 117 del libro X. È comunque molto improbabile che comparisse nel testo originale dell'opera euclidea.
La dimostrazione riportata di seguito è quella presente nel testo di Lucio Lombardo Radice:

> Supponiamo che esista una frazione, di numeratore m e denominatore n, la quale abbia per quadrato il numero 2.
> Le lettere m e n indicano due numeri interi; possiamo pensare i numeri interi m e n primi tra di loro, perché, se avessero un fattore comune potremmo sempre eliminarlo, dividendo per esso tanto il numeratore m quanto il denominatore n (per esempio, se $m = 14$, $n = 10$, al loro posto possiamo mettere i due numeri 7 e 5, ottenuti da essi eliminando il fattore comune 2, e ciò perché: 14/10 = 7/5).
> Dovrebbe essere, dunque:
>
> $$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$$
>
> cioè: $$\frac{m^2}{n^2} = 2 \quad \Rightarrow \quad m^2 = 2n^2$$
>
> m e n, essendo primi tra di loro, non possono essere tutti e due pari. Sono allora possibili tre casi:
>
> 1. m è dispari, n è pure dispari
> 2. m è dispari, n è pari
> 3. m è pari, n è dispari
>
> Facciamo ora vedere che tutti e tre i casi possibili sono invece impossibili.
>
> Il caso 1) è da escludere. Infatti, se m e n sono dispari, sono dispari anche m^2 e n^2 (il quadrato di un numero contiene gli stessi fattori del numero, ripetuto ciascuno due volte; se un numero non è divisibile per 2, non lo è neppure il suo quadrato). Ma il doppio di n^2, cioè $2n^2$, è pari, e non può essere uguale al numero dispari m^2: $m^2 \neq 2n^2$
>
> Il caso 2) è impossibile. Infatti, se m è dispari, m^2 è dispari mentre, come prima… e più di prima, $2n^2$ è pari (già n^2 è pari). Si ha ancora: $m^2 \neq 2n^2$
>
> Infine, anche il caso 3) non si può verificare. Infatti, se m è pari, è divisibile almeno per 2 (forse anche per una "potenza" di 2), e perciò il suo quadrato è divisibile almeno per $2 \cdot 2 = 4$. Se n è dispari, n^2 è pure dispari, $2n^2$ è divisibile solo per 2, e non per 4; perciò $m^2 \neq 2n^2$, perché il primo numero è divisibile per 4, il secondo no.
>
> Quindi: non esiste nessuna frazione, in particolare nessun numero intero, che abbia per quadrato il numero 2.

La duplicazione del cubo

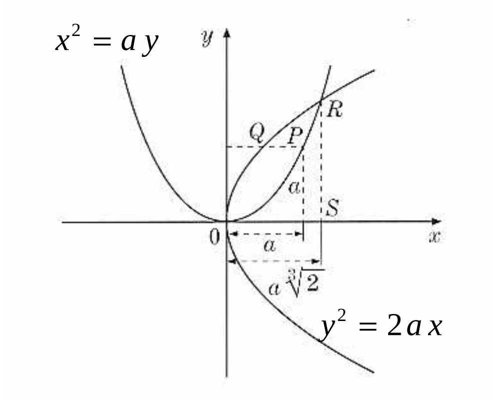
Secondo la leggenda, il problema della duplicazione del cubo nacque durante un'epidemia di peste in Grecia (432 a.C.). Una delegazione si recò presso l'oracolo di Delfi per chiederne la fine. La risposta dell'oracolo fu che l'ira degli dei si sarebbe placata qualora l'altare dedicato ad Apollo[2], a forma di cubo, fosse stato sostituito con uno della stessa forma, ma grande il doppio. I messi fecero costruire un cubo con il lato doppio di quello di partenza, ma la pestilenza non accennò a calmarsi, perché il nuovo altare non aveva volume doppio del primo, bensì otto volte tanto. Se si vuole costruire un altare che abbia volume doppio, esso dovrà avere un lato pari a $\sqrt[3]{2}$ rispetto al lato di quello di partenza.
La leggenda non va oltre; l'epidemia di peste dopo un certo tempo cessò anche se gli Ateniesi non riuscirono a esaudire il volere del dio Apollo. In epoca recente, e cioè nel XIX secolo, è stato infatti dimostrato che non è possibile duplicare un cubo facendo uso solamente di una riga non graduata e di un compasso, poiché $\sqrt[3]{2}$ non è la radice di una equazione algebrica di 1° o di 2° grado. Molti illustri matematici dell'antichità affrontarono comunque il problema della duplicazione del cubo senza tener conto di questa limitazione.

---

[2] In un'altra leggenda si narra invece che Minosse, re di Creta, non soddisfatto per le dimensioni con cui era stata costruita la tomba reale destinata ad accogliere le spoglie del figlio Glauco, ordinò che venisse raddoppiata conservando la forma cubica

Menecmo (350 a.C. circa) risolse il problema della duplicazione del cubo mediante l'intersezione di due parabole (o di una parabola e di un'iperbole). In notazione analitica moderna risolse uno dei seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x\,y = 2a^2 & \textit{iperbole} \\ a\,y = x^2 & \textit{parabola} \end{cases} \qquad \begin{cases} a\,y = x^2 & \textit{parabola} \\ 2\,a\,x = y^2 & \textit{parabola} \end{cases}$$



determinando così il punto P la cui ascissa è il lato del cubo cercato.
Senza la notazione moderna, Menecmo introdusse le sezioni coniche usando tre tipi di cono (retto, acuto e ottuso) e tagliando ciascuno di essi mediante un piano perpendicolare a una generatrice.
Successivamente, Diocle (II sec. a.C.) risolse il problema tramite una curva, la cissoide.
Notiamo inoltre che l'interesse per il problema si è mantenuto vivo fino a un'epoca recente. Basti pensare che sia Newton sia Huygens hanno trovato soluzioni originali e sono state inventate costruzioni meccaniche idonee a fornire soluzioni approssimate.

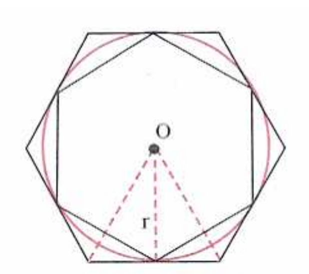
Un irrazionale famoso: pi greco

Solo nel 1767, grazie al matematico svizzero Johann Heinrich Lambert (1728/1777), si dimostrò che π è un numero irrazionale, ovvero un numero decimale illimitato non periodico. Nei tempi moderni, si è giunti a trovarne più di 100 000 cifre decimali, ovviamente senza alcuna periodicità:

3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482 5…[3]

Fin dall'antichità, ma anche oggi, si è utilizzata un'approssimazione di π:

- gli antichi Babilonesi, che si occupavano di geometria per ragioni pratiche, gli attribuivano il valore 3
- gli Ebrei del tempo del re Salomone consideravano π uguale a 3
- nel *Papiro di Rhind* al numero π viene attribuito il valore 3,1604
- 3,14 è l'approssimazione universalmente nota
- 3,2 è l'approssimazione usata dagli artiglieri
- 3,1416 si rivela particolarmente utile nelle applicazioni tecniche



Nell'antichità, una delle migliori approssimazioni è stata quella di Archimede, che riuscì a calcolarne il valore con un preciso metodo scientifico. Partì dalla considerazione che la lunghezza della circonferenza è maggiore del perimetro di un qualunque poligono inscritto e minore del perimetro di un qualunque poligono circoscritto.
Archimede ripeté questo ragionamento inscrivendo e circoscrivendo nella circonferenza poligoni regolari con un numero di lati sempre maggiore, arrivando al poligono regolare di 96 lati, così trovò che:

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{10}{70}$$

e cioè: $3{,}1408\ldots < \pi < 3{,}1428\ldots$

Questo calcolo venne ulteriormente migliorato da un "calcolatore" cinese che utilizzò il poligono di 3072 lati.
Un contributo notevole al calcolo di π fu dato dall'introduzione in matematica dei calcoli "infiniti". Mediante l'applicazione di procedure di tale tipo si è arrivati alle scritture:

$$\pi \cong 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \ldots\right) \text{ formula di Leibniz}$$

$$\pi \cong 2\left(\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdot\ldots\right) \text{ ovvero: } \pi \cong 2\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\ldots\right) \text{ formula di Wallis}$$

$$\pi \cong 2\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1\cdot 2}{3\cdot 5} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 7} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} + \ldots\right)$$

[3] http://www.piday.org/ in questo sito si può trovare il primo milione di cifre del pi greco

Al *Palais de la Découverte*[4], si può ammirare una sala unica al mondo: la sala è rotonda e tutt'intorno alla base c'è una fascia circolare che riporta i nomi di celebri matematici, 58 per la precisione:

Abel Aboul-Wefa Ahmes Albatani Alkhowaresmi Ampere Apollonius Archimede Barrow Bernoulli Bolyai Cantor Cauchy Cavalieri Chasles Clairaut Cotes D'alembert Desargues Diophante Euclide Euler Fermat Fourier Galois Gauss Godel Hamilton Hermite Hilbert Hipparque Huygens Jacobi Klein Lagrange Laplace Legendre Leibniz Lejeune-Dirichlet Lie Lobatchevski Monge Napier Newton Painleve Pappus Pascal Poincare Poisson Poncelet Pythagore Riemann Roberval Steiner Tchebychev Viete Wallis Weierstrass

Più in alto, come mostra la figura a lato, i primi 704 decimali di π, scritti a gruppi di dieci, alternativamente di colore rosso e nero:

3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062862089986280348253421
170679821480865132823066470938446095505822317253594081284811174502841027019385211055596446229489
549303819644288109756659334461284756482337867831652712019091456485669234603486104543266482133936
072602491412737245870066063155881748815209209628292540917153643678925903600113305305488204665213
841469519415116094330572703657595919530921861173819326117931051185480744623799627495673518857527
248912279381830119491298336733624406566430860213949463952247371907021798609437027705392171762931
767523846748184676694051320005681271452635608277857713427577896091736371787214684409012249534301
4654958537105079227968925892354201...

Quelli sottolineati sono i 527 decimali determinati da William Shanks e calcolati senza l'aiuto di una calcolatrice, nel 1873. Calcolò 707 decimali, ma solo i primi 527 erano giusti. Le altre cifre non sottolineate sono quelle corrette in seguito. La sala venne realizzata nel 1937 e l'errore venne scoperto nel 1947, da un certo Ferguson. La direzione del Palais fece correggere le cifre nel 1949, anno in cui fu sfondato il muro dei mille decimali.
Nel 1958 le cifre erano diecimila. Centomila nel 1961. Un milione nel 1973. Dieci milioni nel 1983. Cento milioni nel 1987. Un miliardo nel 1989.
Numerose poesie aiutano a ricordare alcune cifre di π:

Ave o Roma o Madre gagliarda di latine virtù che tanto luminoso splendore prodiga spargesti con la tua saggezza.

Ogni parola rappresenta una cifra di π e per sapere quale basta contare le lettere che compongono la parola.

Que j'aime a faire apprendre
Un nombre utile aux sages!
Glorieux Archimede, artiste ingenieux,
Toi, de qui Syracuse loue encore le merite!

E ancora, in inglese, una poesia composta nel 1995 da Mike Keith, ricalcando la poesia "*The Raven*" di Poe: contiene 740 cifre di π!

Poe, E.
Near a Raven

Midnights so dreary, tired and weary.
Silently pondering volumes extolling all by-now obsolete lore.
During my rather long nap - the weirdest tap!
An ominous vibrating sound disturbing my chamber's antedoor.
"This", I whispered quietly, "I ignore".

Origine del simbolo di radice[5]

La parola *radice* (dal latino *radix*) è la traduzione del vocabolo arabo *gidhr* che significava sia radice di un numero sia soluzione di un'equazione. Per indicare la radice, gli Arabi erano soliti sovrapporre al numero la lettera iniziale della parola *gidhr*. Gli Europei, in un primo momento si uniformarono all'uso arabo; in seguito, anteposero al numero un punto per indicare l'estrazione di radice quadrata, due punti per indicare quella della biquadratica e tre per quella della cubica. La lettera R, come simbolo di radice, comparve nelle opere di Leonardo Pisano (1180 circa-1250), il più grande

[4] http://www.palais-decouverte.fr
[5] O. Batoli, G. De Rinaldis, *MATEMATICA 2 Idee metodi applicazioni*, Marietti Scuola

matematico del Medioevo noto anche con il nome di Fibonacci, e, alcuni secoli dopo, nell'enciclopedia matematica *Summa de aritmetica, geometria, proporzioni et proporzionalità* del frate Luca Pacioli (1445-1517). Pacioli apportò una piccola modifica al simbolo: sbarrò la lettera R e introdusse l'uso degli esponenti per indicare l'estrazione della radice quadrata (R^2) e di quella cubica (R^3). Anche Raphael Bombelli (1526-1573) nella sua opera *Algebra* indicò la radice con la lettera R seguita da q. nel caso di radice quadrata o da c. nel caso di quella cubica; indicò inoltre la moltiplicazione con "via" o con "per".

La scrittura: R.q.49 via R.q.5: fa R.q.245

equivale pertanto, in simboli attuali, all'espressione: $\sqrt{49} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{245}$

In quegli stessi anni, nel libro *Die Coss* di Rudolff (1500-1545), comparve un simbolo di radice, una R deformata, che, perfezionato poi da M.C.Stifel (1486-1567) e da Cartesio, è quello attualmente in uso. L'estrazione della radice quadrata, inizialmente eseguita con numeri positivi, venne in seguito applicata anche a quelli negativi introducendo così il concetto di numero complesso.
Il matematico Gerolamo Cardano (1501-1576) nella sua opera *Ars Magna* fu il primo a prendere in considerazione i numeri complessi; nel capitolo XXXVII del *De regula falsum ponendi* si trova il tentativo di eseguire calcoli con le radici quadrate di numeri negativi. È però merito di Bombelli aver introdotto l'unità immaginaria e aver indicato il metodo per eseguire calcoli con numeri complessi; per indicare +i e –i usò le locuzioni "più di meno" e "meno di meno" in forma abbreviata p.d.m. e m.d.m.; pertanto la scrittura: R.c.L.2 p.d.m.1

equivale in simboli attuali all'espressione: $\sqrt{2} + 2i$

BIBLIOGRAFIA
Denis Guedj, *Il teorema del pappagallo*, Longanesi & C., Milano, 2000
Lucio Lombardo Radice, *La matematica da Pitagora a Newton*, Franco Muzzio Editore, Trento, 2003
Pierluigi Pizzamiglio, *La storia della matematica*, I.S.U. Università Cattolica, Milano, 1995
Midhat Gazalé, *Il numero*, Edizioni Dedalo, Bari, 2001
Theoni Pappas, *Le gioie della matematica*, Franco Muzzio Editore, Padova, 1995
Morris Kline, *Storia del pensiero matematico*, Einaudi, Torino, 1991
Enrico Giusti (a cura di), *Pitagora e il suo teorema*, Edizioni Polistampa, Firenze, 2001
F. Conti, E. Giusti (a cura di), *Oltre il compasso*, Edizioni Polistampa, Firenze, 2000
Carl B. Boyer, *Storia della matematica*, Oscar Saggi Mondadori, Milano, 1980
O. Batoli, G. De Rinaldis, *MATEMATICA 2 Idee metodi applicazioni*, Marietti Scuola
P. Oriolo, A. Coda, con la collaborazione di L. Tess, *CORSO DI MATEMATICA (2)*, Edizioni Scolastiche Bruno Mondatori
G. Bucchini, E. Magi, M. Ottaviano, A. Gambardella, *CORSO DI MATEMATICA (2)*, Calderoni
a cura di E. Gallo, *Attività, teoria, esercizi per FARE MATEMATICA (1 – 2)*, Sei