

Esercizi sulle Disequazioni

Esercizio 1

Trovare le soluzioni delle seguenti disequazioni:

$$1.1) \quad x^2 - 1 > 0$$

$$1.2) \quad \frac{2-x}{x+4} \leq 0$$

$$1.3) \quad \frac{x^2-1}{x+3} < \frac{3}{x+3}$$

$$1.4) \quad \frac{x^2-6x+9}{x^2(x^2+4x+4)} < 0$$

$$1.5) \quad x^2(x^2+10x+25)(x^2+6x+9) \geq 0$$

$$1.6) \quad \frac{2x-3}{x^2-25} > \frac{1}{x-5} + \frac{1}{x+5}$$

$$1.7) \quad \frac{8x^2+4x-14}{4x^2-1} < 2$$

$$1.8) \quad \frac{x+1}{x^2-3x+1} > 0$$

$$1.9) \quad \frac{-x^2+3x-10}{x^3+x} > 0$$

Esercizio 2

Trovare le soluzioni delle seguenti disequazioni (tratte dal secondo parziale del 2002):

$$2.1) \quad \frac{x^2-4}{x-1} \geq x+1$$

$$2.2) \quad \frac{x^2+2x-3}{x+3} \geq x+1$$

$$2.3) \quad \frac{x^2-3x-18}{x^2-12x+32} \leq 0$$

$$2.4) \quad \frac{x^2 - 12x + 32}{x^2 - 3x - 18} > 0$$

$$2.5) \quad \frac{x^2 - 12x + 32}{x^2 + 9} > 0$$

$$2.6) \quad \frac{x-1}{x-6} > x-3$$

$$2.7) \quad \frac{x^3 + 2x - 3}{x+3} \geq x^2 + 5x - 1$$

$$2.8) \quad \frac{x^3 - 4}{x-1} \geq x^2 + 3x - 1$$

$$2.9) \quad \frac{x^3 + 2x - 3}{x+3} \geq x^2 + 6x - 4$$

Esercizio 3

Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni

$$3.1) \quad \begin{cases} x + 2 > 3 \\ 2x - 1 > x + 5 \end{cases}$$

$$3.2) \quad \begin{cases} \frac{(x+2)(x-1)}{3} > 0 \\ \frac{1}{2}x + 1 < \frac{3}{2}x - 1 \end{cases}$$

$$3.3) \quad \begin{cases} \frac{1+x}{1-x} \geq 0 \\ 2x(3-x) \leq 0 \end{cases}$$

$$3.4) \quad \begin{cases} x^2 - x - 2 \geq 0 \\ 16 - x^2 > 0 \end{cases}$$

$$3.5) \quad \begin{cases} \frac{x+1}{2} - \frac{x-1}{3} > 0 \\ \frac{3x+1}{3} - 1 > 0 \\ x+2 > -5x-1 \end{cases}$$

$$3.6) \quad \begin{cases} x^2 - 6x + 5 > 0 \\ x^2 - 2x - 3 < 0 \\ x^2 - 4 > 0 \end{cases}$$

Soluzioni

Al fine di risolvere le disequazioni sarà spesso utile trasformarle in altre ad esse equivalenti. Queste trasformazioni possono essere effettuate utilizzando i due *principi di equivalenza* per le disequazioni che ricordiamo:

I Principio: sommando o sottraendo ai due membri di una disequazione una stessa quantità si ottiene un'altra disequazione equivalente alla data.

II Principio: moltiplicando o dividendo i due membri di una disequazione per una stessa quantità positiva si ottiene un'altra disequazione equivalente alla data; moltiplicando o dividendo i due membri di una disequazione per una stessa quantità negativa si ottiene un'altra disequazione equivalente alla data se si cambia il verso della disuguaglianza.

Esercizio 1

1.1) Consideriamo la disequazione

$$x^2 - 1 > 0$$

e modifichiamola in modo da poterne calcolare il segno. A tal fine scomponiamo in binomio e avremo

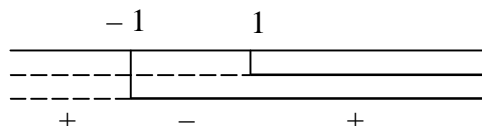
$$x^2 - 1 > 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) > 0$$

quindi studieremo la disequazione nella forma

$$(x-1)(x+1) > 0.$$

Avremo

$$\begin{aligned} x-1 > 0 & \text{ per } x > 1 \\ x+1 > 0 & \text{ per } x > -1 \end{aligned}$$



La soluzione sarà quindi

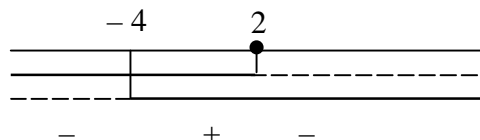
$$x < -1 \quad \text{e} \quad x > 1$$

1.2) Consideriamo la disequazione

$$\frac{2-x}{x+4} \leq 0.$$

Avremo

$$\begin{aligned} 2-x \leq 0 & \text{ per } -2+x \geq 0 & \text{ per } x \geq 2 \\ x+4 < 0 & \text{ per } x < -4 \end{aligned}$$



La soluzione sarà quindi

$$\boxed{x < -4 \quad \text{e} \quad x \geq 2}$$

1.3) Consideriamo la disequazione

$$\frac{x^2 - 1}{x + 3} < \frac{3}{x + 3}$$

e modifichiamola in modo da poterne calcolare il segno. A tal fine portiamo tutti i termini a sinistra, facciamo il minimo comune multiplo ed eseguiamo i calcoli

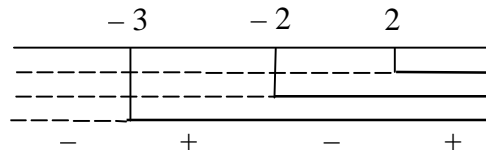
$$\frac{x^2 - 1}{x + 3} < \frac{3}{x + 3} \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x + 3} - \frac{3}{x + 3} < 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 1 - 3}{x + 3} < 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 4}{x + 3} < 0 \Rightarrow \frac{(x - 2)(x + 2)}{x + 3} < 0$$

quindi studieremo la disequazione nella forma

$$\frac{(x - 2)(x + 2)}{x + 3} < 0.$$

Avremo

$$\begin{aligned} x - 2 < 0 & \text{ per } x < 2 \\ x + 2 < 0 & \text{ per } x < -2 \\ x + 3 < 0 & \text{ per } x < -3 \end{aligned}$$



La soluzione sarà quindi

$$\boxed{x < -3 \quad \text{e} \quad -2 < x < 2}$$

1.4) Consideriamo la disequazione

$$\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2(x^2 + 4x + 4)} < 0$$

e modifichiamola in modo da poterne calcolare il segno. A tal fine scomponiamo i polinomi del numeratore e del denominatore.

- Numeratore: $x^2 - 6x + 9$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 9}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{6 \pm 0}{2} \Rightarrow x_1 = x_2 = 3$$

quindi

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2.$$

Che si trattava di un quadrato di un binomio si poteva vedere anche direttamente.

- Denominatore: $x^2(x^2 + 4x + 4)$. Scomponiamo il secondo fattore

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 4}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-4 \pm 0}{2} \Rightarrow x_1 = x_2 = -2$$

quindi

$$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2.$$

Anche qui, che si trattava di un quadrato di un binomio, si poteva vedere direttamente. Studieremo allora la disequazione nella forma

$$\frac{(x-3)^2}{x^2(x+2)^2} < 0.$$

Avremo

$$(x-3)^2 < 0 \quad \text{per nessun valore di } x$$

$$x^2 < 0 \quad \text{per nessun valore di } x$$

$$(x+2)^2 < 0 \quad \text{per nessun valore di } x$$

Siccome tutti e tre i fattori sono sempre positivi il loro prodotto non sarà mai negativo quindi questa disequazione NON AMMETTE SOLUZIONI.

1.5) Consideriamo la disequazione

$$x^2(x^2 + 10x + 25)(x^2 + 6x + 9) \geq 0$$

e modifichiamola in modo da poterne calcolare il segno. A tal fine scomponiamo i polinomi del numeratore.

- $x^2 + 10x + 25$

$$x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 25}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{0}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-10 \pm 0}{2} \Rightarrow x_1 = x_2 = -5$$

quindi

$$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2.$$

Che si trattava di un quadrato di un binomio si poteva vedere anche direttamente.

- $x^2 + 6x + 9$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 9}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-6 \pm 0}{2} \Rightarrow x_1 = x_2 = -3$$

quindi

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2.$$

Anche qui, che si trattava di un quadrato di un binomio, si poteva vedere direttamente. Studieremo allora la disequazione nella forma

$$x^2(x + 5)^2(x + 3)^2 \geq 0.$$

Avremo

$$x^2 \geq 0 \quad \text{per ogni valore di } x$$

$$(x + 5)^2 \geq 0 \quad \text{per ogni valore di } x$$

$$(x + 3)^2 \geq 0 \quad \text{per ogni valore di } x$$

Siccome tutti e tre i fattori sono sempre positivi il loro prodotto sarà sempre positivo quindi questa disequazione E' SEMPRE VERIFICATA.

1.6) Consideriamo la disequazione

$$\frac{2x-3}{x^2-25} < \frac{1}{x-5} + \frac{1}{x+5}$$

e modifichiamola in modo da poterne calcolare il segno. A tal fine portiamo tutti i termini a sinistra, facciamo il minimo comune multiplo ed eseguiamo i calcoli

$$\frac{2x-3}{x^2-25} > \frac{1}{x-5} + \frac{1}{x+5} \Rightarrow \frac{2x-3}{(x-5)(x+5)} - \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x+5} > 0 \Rightarrow \frac{2x-3-(x+5)-(x-5)}{(x-5)(x+5)} > 0 \Rightarrow$$

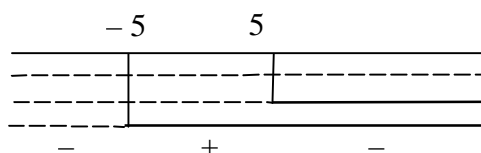
$$\Rightarrow \frac{2x-3-x-5-x+5}{(x-5)(x+5)} > 0 \Rightarrow \frac{-3}{(x-5)(x+5)} > 0$$

quindi studieremo la disequazione nella forma

$$\frac{-3}{(x-5)(x+5)} > 0.$$

Avremo

$$\begin{aligned} -3 > 0 & \quad \text{per nessun valore di } x \\ x-5 > 0 & \quad \text{per } x > 5 \\ x+5 > 0 & \quad \text{per } x > -5 \end{aligned}$$



La soluzione sarà quindi

$$\boxed{-5 < x < 5}$$

1.7) Consideriamo la disequazione

$$\frac{8x^2 + 4x - 14}{4x^2 - 1} < 2$$

e modifichiamola in modo da poterne calcolare il segno. A tal fine portiamo tutti i termini a sinistra, facciamo il minimo comune multiplo ed eseguiamo i calcoli

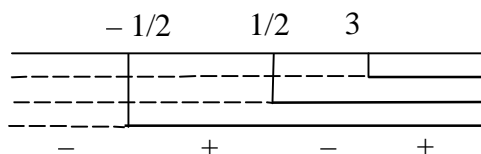
$$\begin{aligned} \frac{8x^2 + 4x - 14}{4x^2 - 1} < 2 & \Rightarrow \frac{8x^2 + 4x - 14}{4x^2 - 1} - 2 < 0 \Rightarrow \frac{8x^2 + 4x - 14 - 2(4x^2 - 1)}{4x^2 - 1} < 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \frac{8x^2 + 4x - 14 - 8x^2 + 2}{4x^2 - 1} < 0 \Rightarrow \frac{4x - 12}{4x^2 - 1} < 0 \Rightarrow \frac{4(x-3)}{(2x-1)(2x+1)} < 0 \Rightarrow \frac{x-3}{(2x-1)(2x+1)} < 0 \end{aligned}$$

quindi studieremo la disequazione nella forma

$$\frac{x-3}{(2x-1)(2x+1)} < 0.$$

Avremo

$$\begin{aligned} x-3 < 0 & \quad \text{per } x < 3 \\ 2x-1 < 0 & \quad \text{per } x < \frac{1}{2} \\ 2x+1 < 0 & \quad \text{per } x < -\frac{1}{2} \end{aligned}$$



La soluzione sarà quindi

$$\boxed{x < -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} < x < 3}$$

1.8) Consideriamo la disequazione

$$\frac{x+1}{x^2-3x+1} > 0$$

e modifichiamola in modo da poterne calcolare il segno. A tal fine scomponiamo il polinomio al denominatore.

- Denominatore: $x^2 - 3x + 1$.

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0,38 \\ x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2,62 \end{cases}$$

quindi

$$x^2 - 3x + 1 = \left(x - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) \right) \left(x - \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) \right).$$

Studieremo allora la disequazione nella forma

$$\frac{x+1}{\left(x - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) \right) \left(x - \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) \right)} \geq 0.$$

Avremo

$$x+1 > 0$$

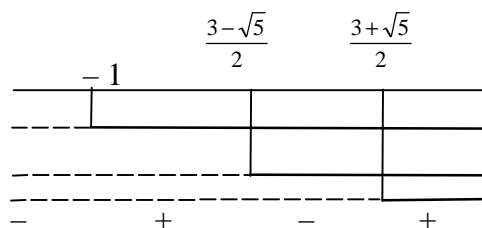
$$x - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) > 0$$

$$x - \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) > 0$$

per $x > -1$

$$\text{per } x > \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{per } x > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$



La soluzione sarà quindi

$$\boxed{-1 \leq x < \frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad x > \frac{3+\sqrt{5}}{2}}$$

1.9) Consideriamo la disequazione

$$\frac{-x^2 + 3x - 10}{x^3 + x} > 0$$

e modifichiamola in modo da poterne calcolare il segno. A tal fine scomponiamo i polinomi al numeratore e al denominatore

- Numeratore: $-x^2 + 3x - 10 = -(x^2 - 3x + 10)$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 10}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{-31}}{2}$$

Abbiamo quindi che $\Delta < 0$. Quando $\Delta < 0$ il trinomio di secondo grado è sempre positivo se il coefficiente di x^2 è positivo, oppure sempre negativo se il coefficiente di x^2 è negativo. Nel nostro caso il trinomio è $x^2 - 3x + 10$ e quindi il coefficiente di x^2 è 1 che è positivo, quindi il trinomio $x^2 - 3x + 10$ è positivo per ogni valore di x e di conseguenza $-(x^2 - 3x + 10)$ sarà negativo per ogni valore di x .

- Denominatore: $x^3 + x$

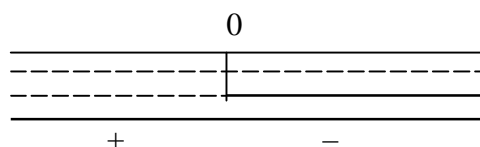
$$x^3 + x = x(x^2 + 1).$$

Studieremo allora la disequazione nella forma

$$\frac{-(x^2 - 3x + 10)}{x(x^2 + 1)} > 0.$$

Avremo

$$\begin{array}{ll} -(x^2 - 3x + 10) > 0 & \text{per nessun valore di } x \\ x > 0 & \text{per } x > 0 \\ x^2 + 1 > 0 & \text{per ogni valore di } x \end{array}$$



La soluzione sarà quindi

$$\boxed{x < 0}$$

Esercizio 2

2.1) Consideriamo la disequazione

$$\frac{x^2 - 4}{x - 1} \geq x + 1$$

e modifichiamola in modo da poterne calcolare il segno. A tal fine portiamo tutti i termini a sinistra, facciamo il minimo comune multiplo ed eseguiamo i calcoli

$$\frac{x^2-4}{x-1} \geq x+1 \Rightarrow \frac{x^2-4}{x-1} - (x+1) \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2-4-(x+1)(x-1)}{x-1} \geq 0 \Rightarrow$$

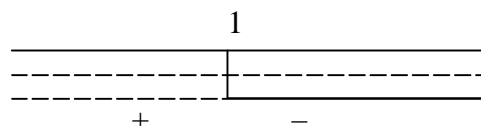
$$\Rightarrow \frac{x^2-4-(x^2-1)}{x-1} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2-4-x^2+1}{x-1} \geq 0 \Rightarrow \frac{-3}{x-1} \geq 0$$

quindi studieremo la disequazione nella forma

$$\frac{-3}{x-1} \geq 0.$$

Avremo

$$\begin{aligned} -3 \geq 0 & \quad \text{per nessun valore di } x \\ x-1 > 0 & \quad \text{per } x > 1 \end{aligned}$$



La soluzione sarà quindi

$$\boxed{x < 1}$$

2.2) Consideriamo la disequazione

$$\frac{x^2+2x-3}{x+3} \geq x+1$$

e modifichiamola in modo da poterne calcolare il segno. A tal fine portiamo tutti i termini a sinistra, facciamo il minimo comune multiplo ed eseguiamo i calcoli

$$\begin{aligned} \frac{x^2+2x-3}{x+3} \geq x+1 & \Rightarrow \frac{x^2+2x-3}{x+3} - (x+1) \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2+2x-3-(x+1)(x+3)}{x+3} \geq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{x^2+2x-3-(x^2+3x+x+3)}{x+3} \geq 0 & \Rightarrow \frac{x^2+2x-3-x^2-4x-3}{x+3} \geq 0 \Rightarrow \frac{-2x-6}{x+3} \geq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{-2(x+3)}{x+3} \geq 0 & \Rightarrow -2 \geq 0 \end{aligned}$$

quindi studieremo la disequazione nella forma

$$-2 \geq 0$$

ma siccome -2 non può essere positivo questa disequazione non ammette soluzione.

2.3) Consideriamo la disequazione

$$\frac{x^2 - 3x - 18}{x^2 - 12x + 32} \leq 0$$

e modifichiamola in modo da poterne calcolare il segno. A tal fine scomponiamo i polinomi del numeratore e del denominatore.

- Numeratore: $x^2 - 3x - 18$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot (-18)}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{81}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm 9}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 6 \end{cases}$$

quindi

$$x^2 - 3x - 18 = (x + 3)(x - 6).$$

- Denominatore: $x^2 - 12x + 32$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 32}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{16}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{12 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 8 \end{cases}$$

quindi

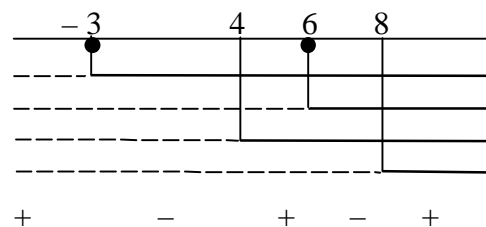
$$x^2 - 12x + 32 = (x - 4)(x - 8).$$

Studieremo allora la disequazione nella forma

$$\frac{(x + 3)(x - 6)}{(x - 4)(x - 8)} \leq 0.$$

Avremo

$$\begin{aligned} x + 3 \leq 0 & \text{ per } x \leq -3 \\ x - 6 \leq 0 & \text{ per } x \leq 6 \\ x - 4 < 0 & \text{ per } x < 4 \\ x - 8 < 0 & \text{ per } x < 8 \end{aligned}$$



La soluzione sarà quindi

$$\boxed{-3 \leq x < 4 \quad \text{e} \quad 6 \leq x < 8}$$

2.4) Consideriamo la disequazione

$$\frac{x^2 - 12x + 32}{x^2 - 3x - 18} > 0$$

e modifichiamola in modo da poterne calcolare il segno. A tal fine scomponiamo i polinomi del numeratore e del denominatore.

- Numeratore: $x^2 - 12x + 32$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 32}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{16}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{12 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 8 \end{cases}$$

quindi

$$x^2 - 12x + 32 = (x - 4)(x - 8).$$

- Denominatore: $x^2 - 3x - 18$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot (-18)}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{81}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm 9}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 6 \end{cases}$$

quindi

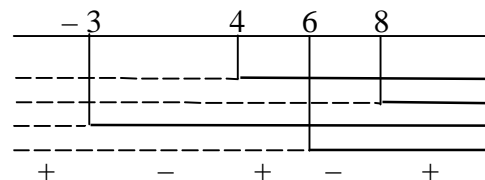
$$x^2 - 3x - 18 = (x + 3)(x - 6).$$

Studieremo allora la disequazione nella forma

$$\frac{(x - 4)(x - 8)}{(x + 3)(x - 6)} > 0.$$

Avremo

$$\begin{array}{lll} x - 4 > 0 & \text{per} & x > 4 \\ x - 8 > 0 & \text{per} & x > 8 \\ x + 3 > 0 & \text{per} & x > -3 \\ x - 6 > 0 & \text{per} & x > 6 \end{array}$$



La soluzione sarà quindi

$$\boxed{x < -3 \quad 4 < x < 6 \quad x > 8}$$

2.5) Consideriamo la disequazione

$$\frac{x^2 - 12x + 32}{x^2 + 9} > 0$$

e modifichiamola in modo da poterne calcolare il segno. A tal fine scomponiamo il polinomio del numeratore e analizziamo quello al denominatore.

- Numeratore: $x^2 - 12x + 32$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 32}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{16}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{12 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 8 \end{cases}$$

quindi

$$x^2 - 12x + 32 = (x - 4)(x - 8).$$

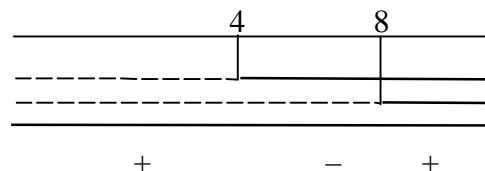
- Denominatore: $x^2 + 9$. In questo caso il denominatore è sempre positivo perché non si annulla mai e qualunque valore si sostituisca troviamo sempre un numero positivo. In generale, un polinomio del tipo $x^2 + a$, con a positivo è sempre positivo.

Studieremo allora la disequazione nella forma

$$\frac{(x-4)(x-8)}{x^2+9} > 0.$$

Avremo

$$\begin{aligned} x-4 > 0 & \text{ per } x > 4 \\ x-8 > 0 & \text{ per } x > 8 \\ x^2+9 > 0 & \text{ per ogni valore di } x \end{aligned}$$



La soluzione sarà quindi

$$\boxed{x < 4 \quad \text{e} \quad x > 8}$$

2.6) Consideriamo la disequazione

$$\frac{x-1}{x-6} > x-3$$

e modifichiamola in modo da poterne calcolare il segno. A tal fine portiamo tutti i termini a sinistra, facciamo il minimo comune multiplo ed eseguiamo i calcoli

$$\frac{x-1}{x-6} > x-3 \Rightarrow \frac{x-1}{x-6} - (x-3) > 0 \Rightarrow \frac{x-1-(x-3)(x-6)}{x-6} > 0 \Rightarrow \frac{x-1-(x^2-6x-3x+18)}{x-6} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x-1-x^2+9x-18}{x-6} > 0 \Rightarrow \frac{-x^2+10x-19}{x-6} > 0 \Rightarrow \frac{-(x^2-10x+19)}{x-6} > 0 \Rightarrow \frac{x^2-10x+19}{x-6} < 0.$$

A questo punto scomponiamo il polinomio al numeratore: $x^2 - 10x + 19$

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 19}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{24}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{10 \pm 2\sqrt{6}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{6} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 - \sqrt{6} \approx 2,55 \\ x_2 = 5 + \sqrt{6} \approx 7,45 \end{cases}$$

quindi

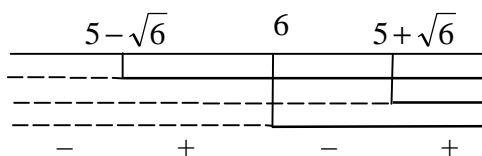
$$x^2 - 10x + 19 = (x - (5 - \sqrt{6}))(x - (5 + \sqrt{6}))$$

quindi studieremo la disequazione nella forma

$$\frac{(x - (5 - \sqrt{6}))(x - (5 + \sqrt{6}))}{x - 6} < 0.$$

Avremo

$$\begin{aligned} x - (5 - \sqrt{6}) < 0 & \text{ per } x < (5 - \sqrt{6}) \\ x - (5 + \sqrt{6}) < 0 & \text{ per } x < (5 + \sqrt{6}) \\ x - 6 < 0 & \text{ per } x < 6 \end{aligned}$$



La soluzione sarà quindi

$$\boxed{x < 5 - \sqrt{6} \quad \text{e} \quad 6 < x < 5 + \sqrt{6}}$$

2.7) Consideriamo la disequazione

$$\frac{x^3 + 2x - 3}{x + 3} \geq x^2 + 5x - 1$$

e modifichiamola in modo da poterne calcolare il segno. A tal fine portiamo tutti i termini a sinistra, facciamo il minimo comune multiplo ed eseguiamo i calcoli

$$\frac{x^3 + 2x - 3}{x + 3} \geq x^2 + 5x - 1 \Rightarrow \frac{x^3 + 2x - 3}{x + 3} - (x^2 + 5x - 1) \geq 0 \Rightarrow \frac{x^3 + 2x - 3 - (x^2 + 5x - 1)(x + 3)}{x + 3} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^3 + 2x - 3 - (x^3 + 3x^2 + 5x^2 + 15x - x - 3)}{x+3} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^3 + 2x - 3 - x^3 - 8x^2 - 14x + 3}{x+3} \geq 0 \Rightarrow$$

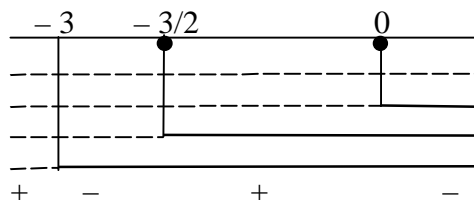
$$\Rightarrow \frac{-8x^2 - 12x}{x+3} \geq 0 \Rightarrow \frac{-4x(2x+3)}{x+3} \geq 0$$

quindi studieremo la disequazione nella forma

$$\frac{-4x(2x+3)}{x+3} \geq 0.$$

Avremo

$$\begin{aligned} -4 \geq 0 & \text{ per nessun valore di } x \\ x \geq 0 & \text{ per } x \geq 0 \\ 2x+3 \geq 0 & \text{ per } x \geq -\frac{3}{2} \\ x+3 > 0 & \text{ per } x > -3 \end{aligned}$$



La soluzione sarà quindi

$$x < -3 \quad \text{e} \quad -\frac{3}{2} \leq x \leq 0$$

2.8) Consideriamo la disequazione

$$\frac{x^3 - 4}{x-1} \geq x^2 + 3x - 1$$

e modifichiamola in modo da poterne calcolare il segno. A tal fine portiamo tutti i termini a sinistra, facciamo il minimo comune multiplo ed eseguiamo i calcoli

$$\begin{aligned} \frac{x^3 - 4}{x-1} \geq x^2 + 3x - 1 & \Rightarrow \frac{x^3 - 4}{x-1} - (x^2 + 3x - 1) \geq 0 \Rightarrow \frac{x^3 - 4 - (x^2 + 3x - 1)(x-1)}{x-1} \geq 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \frac{x^3 - 4 - (x^3 - x^2 + 3x^2 - 3x - x + 1)}{x-1} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^3 - 4 - x^3 - 2x^2 + 4x - 1}{x-1} \geq 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \frac{-2x^2 + 4x - 5}{x-1} \geq 0 \Rightarrow \frac{-(2x^2 - 4x + 5)}{x-1} \geq 0 \Rightarrow \frac{2x^2 - 4x + 5}{x-1} \leq 0 \end{aligned}$$

A questo punto scomponiamo il polinomio al numeratore: $2x^2 - 4x + 5$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 2 \cdot 5}}{4} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{-24}}{4}.$$

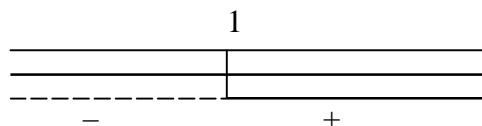
Abbiamo quindi che $\Delta < 0$. Quando $\Delta < 0$ il trinomio di secondo grado è sempre positivo se il coefficiente di x^2 è positivo, oppure sempre negativo se il coefficiente di x^2 è negativo. Nel nostro caso il coefficiente di x^2 è 2 che è positivo, quindi il trinomio $2x^2 - 4x + 5$ è positivo per ogni valore di x .

Quindi studieremo la disequazione nella forma

$$\frac{2x^2 - 4x + 5}{x - 1} \leq 0$$

e avremo

$$\begin{array}{ll} 2x^2 - 4x + 5 < 0 & \text{per nessun valore di } x \\ x - 1 < 0 & \text{per } x < 1 \end{array}$$



La soluzione sarà quindi

$$\boxed{x < 1}$$

2.9) Consideriamo la disequazione

$$\frac{x^3 + 2x - 3}{x + 3} \geq x^2 + 6x - 4$$

e modifichiamola in modo da poterne calcolare il segno. A tal fine portiamo tutti i termini a sinistra, facciamo il minimo comune multiplo ed eseguiamo i calcoli

$$\begin{aligned} \frac{x^3 + 2x - 3}{x + 3} \geq x^2 + 6x - 4 &\Rightarrow \frac{x^3 + 2x - 3}{x + 3} - (x^2 + 6x - 4) \geq 0 \Rightarrow \frac{x^3 + 2x - 3 - (x^2 + 6x - 4)(x + 3)}{x + 3} \geq 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{x^3 + 2x - 3 - (x^3 + 3x^2 + 6x^2 + 18x - 4x - 12)}{x + 3} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^3 + 2x - 3 - x^3 - 9x^2 - 14x + 12}{x + 3} \geq 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{-9x^2 - 12x + 9}{x + 3} \geq 0 \Rightarrow \frac{-3(3x^2 + 4x - 3)}{x + 3} \geq 0 \end{aligned}$$

A questo punto scomponiamo il polinomio al numeratore: $3x^2 + 4x - 3$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3 \cdot (-3)}}{6} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{52}}{6} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{13}}{6} \Rightarrow$$

$$x \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{13}}{3} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-2 - \sqrt{13}}{3} \approx -1,87 \\ x_2 = \frac{-2 + \sqrt{13}}{3} \approx 0,54 \end{cases}$$

quindi

$$3x^2 + 4x - 3 = 3 \left(x - \left(\frac{-2 - \sqrt{13}}{3} \right) \right) \left(x - \left(\frac{-2 + \sqrt{13}}{3} \right) \right)$$

e avremo

$$\frac{-3(3x^2 + 4x - 3)}{x+3} \geq 0 \Rightarrow \frac{-3 \cdot 3 \left(x - \left(\frac{-2 - \sqrt{13}}{3} \right) \right) \left(x - \left(\frac{-2 + \sqrt{13}}{3} \right) \right)}{x+3} \geq 0$$

e quindi studieremo la disequazione nella forma

$$\frac{-9 \left(x - \left(\frac{-2 - \sqrt{13}}{3} \right) \right) \left(x - \left(\frac{-2 + \sqrt{13}}{3} \right) \right)}{x+3} \geq 0.$$

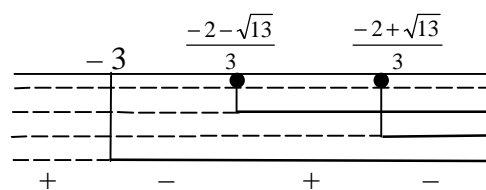
Avremo

$-9 \geq 0$ per nessun valore di x

$$x - \left(\frac{-2 - \sqrt{13}}{3} \right) \geq 0 \quad \text{per} \quad x \geq \frac{-2 - \sqrt{13}}{3}$$

$$x - \left(\frac{-2 + \sqrt{13}}{3} \right) \geq 0 \quad \text{per} \quad x \geq \frac{-2 + \sqrt{13}}{3}$$

$$x+3 > 0 \quad \text{per} \quad x > -3$$



La soluzione sarà quindi

$$\boxed{x \leq -3 \quad \text{e} \quad \frac{-2 - \sqrt{13}}{3} \leq x \leq \frac{-2 + \sqrt{13}}{3}}$$

Esercizio 3

3.1) Consideriamo il seguente sistema

$$\begin{cases} x + 2 > 3 \\ 2x - 1 > x + 5 \end{cases}$$

e cerchiamo le soluzioni di ogni equazione. Avremo

$$1. \quad x + 2 > 3$$

$$x + 2 > 3 \Rightarrow x > 3 - 2 \Rightarrow x > 1$$

quindi la soluzione della prima disequazione è

$$x > 1$$

$$2. \quad 2x - 1 > x + 5$$

$$2x - 1 > x + 5 \Rightarrow 2x - x > 5 + 1 \Rightarrow x > 6$$

quindi la soluzione della seconda disequazione è

$$x > 6$$

Il sistema si può quindi scrivere nella forma equivalente

$$\begin{cases} x > 1 \\ x > 6 \end{cases}$$



quindi la soluzione del sistema è

$$x > 6$$

3.2) Consideriamo il seguente sistema

$$\begin{cases} \frac{(x+2)(x-1)}{3} > 0 \\ \frac{1}{2}x + 1 < \frac{3}{2}x - 1 \end{cases}$$

e cerchiamo le soluzioni di ogni equazione. Avremo

$$1. \quad \frac{(x+2)(x-1)}{3} > 0$$

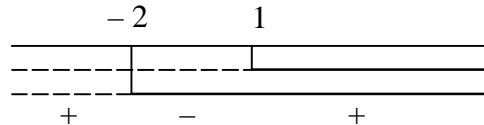
$$\frac{(x+2)(x-1)}{3} > 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) > 0.$$

Studiamo la disequazione nella forma

$$(x+2)(x-1) > 0$$

e avremo

$$\begin{aligned} x+2 > 0 & \text{ per } x > -2 \\ x-1 > 0 & \text{ per } x > 1 \end{aligned}$$



quindi la soluzione della prima disequazione è

$$\boxed{x < -2 \quad \text{e} \quad x > 1}$$

$$2. \quad \frac{1}{2}x + 1 < \frac{3}{2}x - 1$$

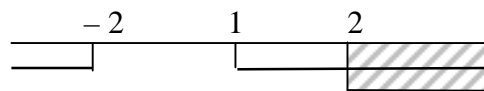
$$\frac{1}{2}x + 1 < \frac{3}{2}x - 1 \Rightarrow \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x < -1 - 1 \Rightarrow \frac{x - 3x}{2} < -2 \Rightarrow \frac{-2x}{2} < -2 \Rightarrow -x < -2 \Rightarrow x > 2$$

quindi la soluzione della seconda disequazione è

$$\boxed{x > 2}$$

Il sistema si può quindi scrivere nella forma equivalente

$$\begin{cases} x < -2 \quad \text{e} \quad x > 1 \\ x > 2 \end{cases}$$



quindi la soluzione del sistema è

$$\boxed{\boxed{x > 2}}$$

3.3) Consideriamo il seguente sistema

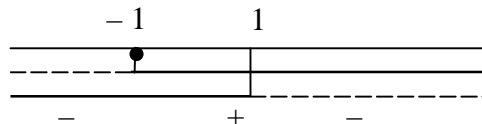
$$\begin{cases} \frac{1+x}{1-x} \geq 0 \\ 2x(3-x) \leq 0 \end{cases}$$

e cerchiamo le soluzioni di ogni equazione. Avremo

$$1. \frac{1+x}{1-x} \geq 0$$

Avremo

$$\begin{aligned} 1+x \geq 0 & \text{ per } x \geq -1 \\ 1-x > 0 & \text{ per } -1+x < 0 \text{ per } x < 1 \end{aligned}$$



quindi la soluzione della prima disequazione è

$$\boxed{-1 \leq x < 1}$$

$$2. 2x(3-x) \leq 0$$

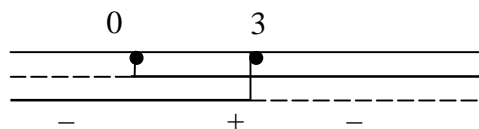
$$2x(3-x) \leq 0 \Rightarrow x(3-x) \leq 0.$$

Studiamo la disequazione nella forma

$$x(3-x) \leq 0.$$

Avremo

$$\begin{aligned} x \leq 0 & \text{ per } x \leq 0 \\ 3-x \leq 0 & \text{ per } -3+x \geq 0 \text{ per } x \geq 3 \end{aligned}$$

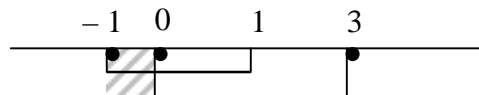


quindi la soluzione della seconda disequazione è

$$\boxed{x \leq 0 \text{ e } x \geq 3}$$

Il sistema si può quindi scrivere nella forma equivalente

$$\begin{cases} -1 \leq x < 1 \\ x \leq 0 \text{ e } x \geq 3 \end{cases}$$



quindi la soluzione del sistema è

$$\boxed{\boxed{-1 \leq x \leq 0}}$$

3.4) Consideriamo il seguente sistema

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 \geq 0 \\ 16 - x^2 > 0 \end{cases}$$

e cerchiamo le soluzioni di ogni equazione. Avremo

1. $x^2 - x - 2 \geq 0$. Scomponiamo il trinomio $x^2 - x - 2$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-2)}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

quindi

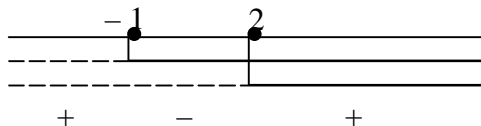
$$x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2).$$

Studieremo quindi la disequazione nella forma

$$(x + 1)(x - 2) \geq 0.$$

Avremo

$$\begin{aligned} x + 1 \geq 0 & \text{ per } x \geq -1 \\ x - 2 \geq 0 & \text{ per } x \geq 2 \end{aligned}$$



quindi la soluzione della prima disequazione è

$$\boxed{x \leq -1 \text{ e } x \geq 2}$$

2. $16 - x^2 > 0$.

$$16 - x^2 > 0 \Rightarrow (4 - x)(4 + x) > 0$$

quindi studiamo la disequazione nella forma

$$(4 - x)(4 + x) > 0$$

e avremo

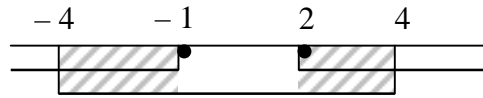
$$\begin{aligned} 4 - x > 0 & \text{ per } -4 + x < 0 & \text{ per } x < 4 \\ 4 + x > 0 & \text{ per } x > -4 \end{aligned}$$

la soluzione della seconda disequazione è

$$\boxed{-4 < x < 4}$$

Il sistema si può quindi scrivere nella forma equivalente

$$\begin{cases} x \leq -1 \text{ e } x \geq 2 \\ -4 < x < 4 \end{cases}$$



quindi la soluzione del sistema è

$$\boxed{-4 < x \leq -1 \text{ e } 2 \leq x < 4}$$

3.5) Consideriamo il seguente sistema

$$\begin{cases} \frac{x+1}{2} - \frac{x-1}{3} > 0 \\ \frac{3x+1}{3} - 1 > 0 \\ x+2 > -5x-1 \end{cases}$$

e cerchiamo le soluzioni di ogni equazione. Avremo

$$1. \frac{x+1}{2} - \frac{x-1}{3} > 0$$

$$\frac{x+1}{2} - \frac{x-1}{3} > 0 \Rightarrow \frac{3(x+1) - 2(x-1)}{6} > 0 \Rightarrow 3x+3-2x+2 > 0 \Rightarrow x+5 > 0 \Rightarrow x > -5$$

quindi la soluzione della prima disequazione è

$$\boxed{x > -5}$$

$$2. \frac{3x+1}{3} - 1 > 0$$

$$\frac{3x+1}{3} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{3x+1-3}{3} > 0 \Rightarrow 3x-2 > 0 \Rightarrow x > \frac{2}{3}$$

quindi la soluzione della seconda disequazione è

$$\boxed{x > \frac{2}{3}}$$

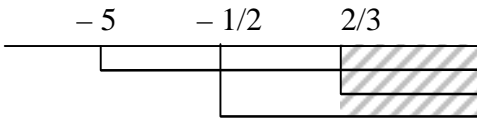
$$3. x+2 > -5x-1$$

$$x+2 > -5x-1 \Rightarrow x+5x > -1-2 \Rightarrow 6x > -3 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$$

quindi la soluzione della terza disequazione è

$$x > -\frac{1}{2}$$

Il sistema si può quindi scrivere nella forma equivalente

$$\begin{cases} x > -5 \\ x > \frac{2}{3} \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases}$$


quindi la soluzione del sistema è

$$x > \frac{2}{3}$$

3.6) Consideriamo il seguente sistema

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 5 > 0 \\ x^2 - 2x - 3 < 0 \\ x^2 - 4 > 0 \end{cases}$$

e cerchiamo le soluzioni di ogni equazione. Avremo

3. $x^2 - 6x + 5 > 0$. Scomponiamo il trinomio $x^2 - 6x + 5$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 5}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{6 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

quindi

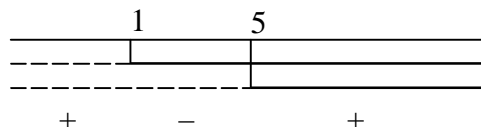
$$x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5).$$

Studieremo quindi la disequazione nella forma

$$(x-1)(x-5) > 0.$$

Avremo

$$\begin{array}{ll} x-1 > 0 & \text{per } x > 1 \\ x-5 > 0 & \text{per } x > 5 \end{array}$$



quindi la soluzione della prima disequazione è

$$\boxed{x < 1 \quad \text{e} \quad x > 5}$$

4. $x^2 - 2x - 3 < 0$ Scomponiamo il trinomio $x^2 - 2x - 3$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-3)}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

quindi

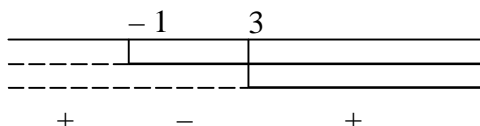
$$x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3).$$

Studieremo quindi la disequazione nella forma

$$(x+1)(x-3) < 0.$$

Avremo

$$\begin{array}{ll} x+1 < 0 & \text{per } x < -1 \\ x-3 < 0 & \text{per } x < 3 \end{array}$$



quindi la soluzione della seconda disequazione è

$$\boxed{-1 < x < 3}$$

5. $x^2 - 4 > 0$.

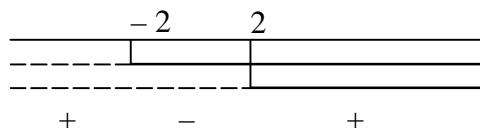
$$x^2 - 4 > 0 \Rightarrow (x-2)(x+2) > 0$$

quindi studiamo la disequazione nella forma

$$(x-2)(x+2) > 0$$

e avremo

$$\begin{array}{ll} x-2 > 0 & \text{per } x > 2 \\ x+2 > 0 & \text{per } x > -2 \end{array}$$

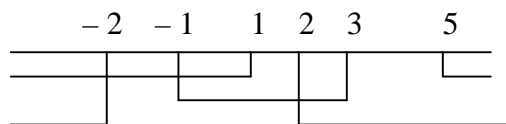


la soluzione della terza disequazione è

$$x < -2 \quad \text{e} \quad x > 2$$

Il sistema si può quindi scrivere nella forma equivalente

$$\begin{cases} x < 1 \quad \text{e} \quad x > 5 \\ -1 < x < 3 \\ x < -2 \quad \text{e} \quad x > 2 \end{cases}$$



Poiché nessun intervallo soddisfa tutte e tre le disequazioni contemporaneamente il sistema NON AMMETTE SOLUZIONE.